Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

В. В. Камінський, Б. І. Мокін

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 515.12
ББК 22.12
К18

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 5 від 22 грудня 2011 р.)

Рецензенти:
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
С. Д. Штовба, доктор технічних наук, доцент

Камінський, В. В.

Вступ до теорії слабких множин : монографія / В. В. Камінський, Б. І. Мокін. – Вінниця, ВНТУ, 2012. – 128 с.

ISBN 978-966-641-459-8

В монографії розглядаються основоположні поняття запропонованої авторами теорії слабких множин, яка покликана узагальнити існуючі теорії звичайних та нечітких множин. Досліджуються зв'язки між слабкими, нечіткими та звичайними множинами. Розглядаються прикладні аспекти нової теорії як більш універсального інструмента моделювання складних систем в умовах невизначеності даних. Книга може зацікавити студентів, аспірантів і спеціалістів з прикладної математики, економіко-математичного моделювання, теорії систем, теорії прийняття рішень та всіх інших, хто використовує математичні методи для моделювання складних систем в інформаційних ситуаціях з високим рівнем невизначеності.

УДК 515.12
ББК 22.12

ISBN 978-966-641-459-8

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ОПР – особа, яка приймає рішення;
ТНМ – теорія нечітких множин;
ФНР – функція напрямлених рівнів належності слабкої множини;
$\mathrm{Dom}\,\mathrm{h}$ – область визначення відображення h;
$\mathrm{Im}\,\mathrm{h}$ – область значень відображення h;
$\forall$ – квантор загальності;
$\exists$ – квантор існування;
$\vee$ – диз'юнкція;
$\wedge$ – кон'юнкція;
$\Leftrightarrow$ – еквівалентно;
$\equiv$ – рівносильно;
$\overset{df}{=}$, $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ – дорівнює та рівносильно за означенням;
♦ – кінець доведення;
$\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ – загальне позначення нечітких множин;
$\widetilde{\widetilde{A}}$, $\widetilde{\widetilde{B}}$ – загальне позначення слабких множин;
χ_A – характеристична функція звичайної множини A;
M_α – простір (множина) ненапрямлених рівнів належності;
S_α, D_α – строгий та нестрогий лінійні порядки на M_α;
E_α, $\overline{E}_\alpha$ – відношення рівності та нерівності на M_α;
$\min M_\alpha$ або $\wedge M_\alpha$ – мінімальний ненапрямлений рівень належності;
$\max M_\alpha$ або $\vee M_\alpha$ – максимальний ненапрямлений рівень належності;
$M_\omega = \{+, -\}$ – простір напрямленостей рівнів належності;
S_ω, D_ω – строгий та нестрогий лінійні порядки на M_ω;
E_ω, $\overline{E}_\omega$ – відношення рівності та нерівності на M_ω;
$\min M_\omega = -$ – мінімальна напрямленість рівнів належності;
$\max M_\omega = +$ – максимальна напрямленість рівнів належності;
$M_{\alpha\omega}$ – простір напрямлених рівнів належності;
$S_{\alpha\omega}$, $D_{\alpha\omega}$ – строгий та нестрогий лінійні порядки на $M_{\alpha\omega}$;
$E_{\alpha\omega}$, $\overline{E}_{\alpha\omega}$ – відношення рівності та нерівності на $M_{\alpha\omega}$;
$\max M_{\alpha\omega} = 1^+$ – максимальний напрямлений рівень належності;
$\min M_{\alpha\omega} = 0^-$ – мінімальний напрямлений рівень належності;

$\sup M$ або $\vee M$ – верхня точна грань підмножини M простору напрямлених рівнів належності;

$\inf M$ або $\wedge M_{\alpha\omega}$ – нижня точна грань підмножини M простору напрямлених рівнів належності;

$\nu_A : X \to M_{\alpha\omega}$ – функція (напрямлених) рівнів слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

$\alpha_A : X \to M_{\alpha}$ – функція ненапрямлених рівнів слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

$\omega_A : X \to M_{\omega}$ – функція напрямленостей слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

card $\overset{\approx}{A}$ – потужність (кардинальне число) слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

$\overset{\approx}{\varnothing}$, $\overset{\approx}{\mathbf{0}}{}^{-}$ – пуста слабка множина;

$\overset{\approx}{X}$, $\overset{\approx}{\mathbf{1}}{}^{+}$ – повна слабка множина;

supp $\overset{\approx}{A}$ – носій слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

${}^{-}X_A$, ${}^{+}X_A$ – відповідно класи негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

${}^{-}D_A$, ${}^{+}D_A$ – відповідно класи негативної та позитивної напрямленостей звичайної множини D відносно слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

$\wp(\overset{\approx}{\mathbf{1}}{}^{+})$ – множина всіх слабких підмножин довільного універсума;

$\wp(\overset{\approx}{X})$ – множина всіх слабких підмножин універсума X;

$\wp(\overset{\approx}{A})$ – множина всіх слабких підмножин слабкої множини $\overset{\approx}{A}$;

$]a; b[$, $[a; b]$ – числовий інтервал та числовий відрізок;

$]\alpha^{\omega}; \beta^{\psi}[$ – інтервал напрямленої осі координат;

$[\alpha^{\omega}; \beta^{\psi}]$ – відрізок напрямленої осі координат;

$\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$ – метричний простір з метрикою ρ_M, заданий на множині напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$;

ρ_M – метрика в просторі напрямлених рівнів належності;

ρ_{R} – звичайна евклідова метрика на множині дійсних чисел;

$O_M(\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon)$ – відкритий шар метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$ з центром в точці α_0^{ω} і радіусом ε;

$O_M[\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon]$ – замкнений шар метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$ з центром в точці α_0^{ω} і радіусом ε;

$O_M(\alpha^{\omega}, \varepsilon)$ – ε-окіл напрямленого рівня належності α^{ω};

$R(\tilde{\tilde{A}})$ – множина всіх реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$ – множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{B}$;

$\underline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$ – множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовлена знизу нечіткою реалізацією $\tilde{B}$;

$\underline{\overline{R}}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$ – множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{A}_1$ та знизу нечіткою реалізацією $\tilde{A}_2$;

$K(\tilde{\tilde{A}})$ – довільна множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{A}$, $\underline{A}$ – верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{\tilde{A}}$, $\underline{\tilde{A}}$ – верхня та нижня нечіткі реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{A}^K$, $\underline{A}^K$ – відповідно верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на множині реалізацій *K*;

$\overline{\overline{A}}$, $\underline{\underline{A}}$ – обумовлена верхня та обумовлена нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\sup A$, $\inf A$ – верхня та нижня точні грані множини *A*;

$\sup\limits_{x\in D} \nu_A(x)$ – верхня точна грань напрямлених рівнів належності елементів множини *D* відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\inf\limits_{x\in D} \nu_A(x)$ – нижня точна грань напрямлених рівнів належності елементів множини *D* відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$M_{\alpha A}$, $M_{\omega A}$ – множина рівнів та множина напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

f^{-1} – обернена функція;

$\mathrm{f}^{-1}(A)$ – повний прообраз множини *A* при відображенні f;

N – множина всіх натуральних чисел;

R – множина дійсних чисел;

R_+ – множина додатних дійсних чисел;

R_{+0} – множина додатних дійсних чисел з нулем ($\mathrm{R}_{+0} = \{0\}\cup\mathrm{R}_+$);

${}^{+}\tilde{\tilde{A}}$, ${}^{-}\tilde{\tilde{A}}$, ${}^{\pm}\tilde{\tilde{A}}$ – позитивно, негативна та змішано напрямлені слабкі множини.

ВСТУП

В цій роботі автори пропонують основні засади нової теорії слабких множин, яка покликана узагальнити існуючі теорії звичайних (канторових) та нечітких множин і, з цієї точки зору, може здобути важливе загальнотеоретичне значення.

В останні роки стрімко зростають роль та можливості інформаційних технологій і тому з'являються додаткові можливості для постановки та розв’язання актуальних для науки та практики нових задач в умовах недостатності та недовизначеності даних [1], які традиційно вважаються одними із найбільш складних.

Проблеми математичного моделювання та розв'язання таких задач випливають із того, що, як часто відзначав Ю. Б. Гермейєр [2, 3], існує тільки один об’єктивний та строгий математичний результат, який можна отримати за максимінним принципом [4–6]. Якщо цей принцип або результат його використання неприйнятний для особи, яка приймає рішення (ОПР), то залишається використовувати експертні оцінки та суб’єктивні гіпотези щодо невизначених параметрів об’єкта моделювання. З цією метою в останні десятиліття широко застосовуються нечіткі множини та лінгвістичні змінні, які дозволяють зменшити невизначеність даних за рахунок використання їх нечітких описів. Але теорія нечітких множин (ТНМ) має такі особливості, які призводять до низки принципових проблем у процесі використання нечітких множин як інструменту моделювання невизначених параметрів складних систем. На ці проблеми неодноразово звертали увагу як прихильники, так і супротивники цієї теорії [7]. Основні із цих проблем пов’язані з тим, що:

1. Аксіоматичні основи ТНМ не дозволяють знайти таку інтерпретацію ступенів належності нечіткій множині, щоб одержати якесь об’єктивне джерело (або розрахунковий алгоритм) для визначення їх значень. Тому експертні оцінки становлять єдине джерело для одержання функцій належності нечітких множин.

2. Аксіоматика ТНМ реалізована так, що ТНМ не має істотних формальних засобів для обмеження впливу суб’єктивних рішень експерта на результат визначення функції належності й формального контролю несуперечності цих рішень.

3. Між станом недовизначеності (коли відомі тільки границі простору невизначеності) і станом нечіткого подання невизначеного параметра (коли стають відомими значення ступенів належності всіх елементів простору невизначеності) існує істотний логічний розрив, що значно ускладнює роботу експерта.

Тому є доцільною та актуальною передбачена в цій роботі розробка нових підходів до математичного моделювання складних систем в умовах невизначеності даних, які дозволять зняти або значно зменшити гостроту відзначених проблем, а також дозволять моделювати невизначені параметри складних систем в умовах відсутності не тільки числових, а навіть нечітких та лінгвістичних значень цих параметрів.

Звичайно, нічого не може заважати використанню теорії слабких множин, як і будь-якої іншої математичної теорії, для розв'язування різних прикладних задач за умови адекватної та зручної інтерпретації цих задач за допомогою аксіом та теоретичних понять нової теорії. Однак автори розглядають нову теорію в першу чергу як інструмент моделювання складних систем в умовах невизначеності даних. Тому виклад формальних математичних положень теорії та доведення теорем по можливості орієнтовані не тільки на професійних математиків, але й на спеціалістів прикладних галузей науки, які цікавляться математичним моделюванням складних систем в інформаційних ситуаціях з високим рівнем невизначеності вихідних даних.

В першому розділі монографії розглянуті передумови теорії слабких множин. Показано, що теорія слабких множин як інструмент моделювання складних систем в умовах невизначеності даних, за задумом авторів, повинна заповнити прогалину між станом повної невизначеності параметрів задачі, коли на універсумі цих параметрів не задано ніяких математичних структур окрім самого універсума, та станом їх нечіткого опису, який може бути здійснений засобами теорії нечітких множин. Новий стан опису невизначених параметрів, який повинен передувати стану нечіткого опису цих параметрів, названо авторами слабким. Дослідження, виконані авторами, показують, що такий опис може бути самодостатнім для остаточного прийняття рішень в умовах невизначеності даних.

В другому розділі роботи вводяться основні поняття нової теорії, зокрема поняття напрямленого рівня належності та простору напрямлених рівнів належності. Розглядаються властивості введених понять та порівнюються з аналогічними, властивостями звичайних та нечітких множин. Розглядаються також властивості слабких множин, які не мають аналогів серед властивостей звичайних та нечітких множин. Вводяться основні бінарні відношення слабких множин, доводяться теореми про властивості цих відношень.

В третьому розділі пропонується геометрична інтерпретація слабких множин, вводяться необхідні для такої інтерпретації нові поняття та наводяться приклади геометричного зображення слабких множин в звичайних декартових та спеціально введених напрямлених осях координат. Вводиться геометрична інтерпретація відношення включення слабких множин в звичайних декартових та напрямлених осях координат. Наводяться рекомендації щодо використання звичайних декартових та напрямлених осей координат для геометричного зображення слабких множин.

В четвертому розділі вводиться поняття відстані між напрямленими рівнями належності слабкій множині, що дає можливість означити метричні характеристики слабких множин та, зокрема, поняття їх неперервності.

П’ятий розділ роботи присвячений вивченню особливостей зв’язку між звичайними, нечіткими та слабкими множинами. Для розкриття сутності цього зв’язку вводяться важливі для теорії слабких множин поняття нечіткої та звичайної реалізацій слабкої множини та розглядаються їх властивості. Вводяться та розглядаються також різні види слабких множин в залежності від їх властивостей.

В шостому розділі представлено принцип узагальнення для слабких множин та розглянуті звичайні функції слабкого аргументу. Доведені теореми, які дозволяють для реалізації розрахунків з використанням введеного принципу узагальнення для слабких множин використовувати відомі методи пошуку верхніх (нижніх) граней звичайних множин, а також методів мінімізація (максимізації) скалярних функцій. Наведені приклади визначення образів слабких множин при звичайних відображеннях.

Текст монографії написаний В. В. Камінським з використанням матеріалів його кандидатської дисертації [8], виконаної під керівництвом професора Б. І. Мокіна, та результатів, отриманих авторами в роботах [9–23], написаних як до, так і після захисту дисертації. В монографію включено також нові результати. Зокрема розглянуто новий підхід до формалізації простору напрямлених рівнів належності слабких множин, розглянуті основні бінарні відношення слабких множин, показано, що їх властивості збігаються із аналогічними властивостями звичайних та нечітких множин, виконано детальний аналіз зв'язку між слабкими, нечіткими та звичайними множинами, доведено низку нових теорем.

Загальне редагування книги здійснено професором Б. І. Мокіним.

Автори висловлюють подяку доценту кафедри моделювання та моніторингу складних систем А. В. Камінському за участь в обговоренні основних положень теорії слабких множин, корисні поради та ідеї, які допомогли довести низку найбільш складних теорем.

Автори висловлюють також подяку С. Ш. Кациву та І. М. Романюку за багатолітні плідні дискусії в заснованому ними спільно з В. В. Камінським математичному семінарі «КаКаРо», завдяки якому були створені необхідні передумови для розробки теорії слабких множин.

РОЗДІЛ 1
ПЕРЕДУМОВИ ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

За останні 30–40 років методами математичного моделювання, теорії систем [24–39] та теорії ідентифікації систем [40–47] отримана значна кількість результатів з дослідження та оптимізації складних систем в умовах різного забезпечення необхідними даними. Створені методи математичного моделювання та оптимізації складних систем в умовах як детермінованих [2, 48–60], так і стохастичних даних [61–67], зроблені значні кроки в напрямку розв’язання задач з невизначеними даними [3–6, 67, 68]. Розроблені математичні методи та моделі широко використовуються в різних галузях науки та техніки [69–76].

З появою теорії нечітких множин вона почала активно використовуватись як засіб моделювання складних систем в умовах невизначеності даних. З’явилась можливість використовувати нечіткий опис невизначених параметрів таких систем, який став проміжним між станом невизначеності числових значень параметрів системи та відомими їх числовими значеннями. Нечіткі множини та лінгвістичні змінні стали інструментом опису параметрів гуманістичних систем, в яких традиційний числовий опис міг викликати значні труднощі або бути неможливим взагалі.

Теорія нечітких множин має також важливе загальне теоретичне значення. Це пов’язано з тим, що поняття множини є одним із основних первинних понять, на яких базується сучасна математика [77–79]. Тому поява в 1965 році роботи Л. Заде [80], в якій введено більш загальне поняття нечіткої множини, обумовила бурхливий розвиток теорії нечітких множин та перегляд багатьох математичних фундаментальних понять, теорій і концепцій з метою розширення їх на більш загальний випадок нечітких множин.

Таке розширення основоположних математичних понять привело фактично до створення математики нечіткості, яка в окремому випадку переходить в межі звичайних математичних теорій, що базуються на понятті звичайної (чіткої) множини у відповідності до того, як нечітка множина в окремому випадку її функції належності переходить в звичайну множину.

Математичні теорії прийняття рішень та автоматичного керування в умовах невизначеності даних одними із перших сприйняли та почали використовувати концепції теорії нечітких множин. З точки зору цих теорій з’явилась можливість в просторі невизначеності параметрів задачі задати нечіткий опис цих невизначених параметрів та в результаті його використання отримати деякий нечіткий розв’язок (дивись, наприклад, [81–87]).

Таким чином Л. Заде поширив математичний формалізм до рівня, коли чіткі значення параметрів в деякому універсумі задачі не існують, або не сформовані, або невідомі, але обов’язково існують їх нечіткі описи у вигляді нечітких множин із заданими їх функціями належності. Тим самим між станом повної невизначеності параметрів задачі, коли на універсумі цих параметрів не задано ніяких математичних структур, окрім самого універсума, та станом визначеності, коли в універсумі задані чіткі значення параметрів, з’явився проміжний стан нечітко заданих параметрів.

Математика нечіткості розробляє методи роботи з такими нечіткими об’єктами, але її формалізм не має ніякого відношення до того, де взялися ці нечіткі об’єкти.

Це типова і законна ситуація для математичних теорій. Наприклад, математичні теорії та методи традиційної математики працюють там, де задані деякі детерміновані дані. Математичний формалізм не має ніякого відношення до того, як їх отримати. Це залишається концептуальною проблемою, в окремому випадку – проблемою фізичних вимірів.

Теорія ймовірностей працює тільки там, де відомі ймовірності випадкових подій, функції розподілу ймовірностей випадкових величин, точок, векторів тощо.

Аксіоматична теорія ймовірностей [88–91], як формальна математична теорія, не має ніякого відношення до того, де взялися ці ймовірності та функції розподілу ймовірностей. Проблеми отримання функцій розподілення ймовірностей лежать за межами цієї теорії і вимагають виконання масових експериментів за умови наявності їх статистичної стійкості, що дає можливість інтерпретувати ймовірність як частоту появи тієї чи іншої випадкової події в статистичному експерименті. Якщо виконання відповідного експерименту неможливе з тієї чи іншої причини, або відсутня статистична стійкість його результатів, то для визначення функцій розподілу ймовірностей залишається можливість використовувати експертні оцінки. Але в цьому випадку ймовірність повинна бути інтерпретована як суб'єктивний ступінь впевненості експерта в можливості настання тієї чи іншої випадкової події.

При цьому слід звернути особливу увагу на той факт, що аксіоматика теорії ймовірності реалізована так, що дозволяє досить суттєво обмежити суб'єктивні експертні оцінки значень функції розподілу ймовірності та співвідношень між ними. Дійсно, експертні оцінки функції розподілу ймовірностей повинні відповідати всім аксіомам теорії ймовірностей [88–92], як окремому випадку теорії міри [93, 94]. А це означає, що свобода експерта вже на чисто формальному рівні досить суттєво обмежена, і це дозволяє формально контролювати можливі принципові помилки експерта і тим самим уникнути їх. Наприклад, експерт не може задати диференціальний закон розподілення ймовірностей настільки довільно, що його інтеграл по області можливих значень випадкової величини не буде дорівнювати одиниці. За цих та інших подібних умов на чисто формальному рівні вже можна буде прийти до висновку, що експертні оцінки утримують помилку.

У випадку теорії нечітких множин її формальні закони не дозволяють зробити нічого подібного – значення функції належності в межах відрізка [0; 1] та співвідношення між ними формально можуть бути довільними. Тому теорія нечітких множин не має суттєвих формальних засобів для обмеження впливу суб'єктивних рішень експерта на результат визначення функції належності і формального контролю несуперечності цих рішень. Крім того її аксіоматичні основи не дозволяють знайти таку інтерпретацію ступенів належності нечіткій множині, щоб одержати якесь об'єктивне джерело (або розрахунковий алгоритм) для визначення їх значень, як це має місце, наприклад, у тієї ж таки теорії ймовірності.

В цьому зв'язку відзначимо, що тут ми не беремо до уваги наукові роботи, в яких нечіткі множини розглядаються як проекції випадкових множин [95–98]. В цьому випадку ступінь належності $\mu_A(x)$ елемента x нечіткій множині $\tilde{A}$ інтерпретується як ймовірність того, що елемент x належить деякій випадковій множині B, для якої нечітка множина $\widetilde{A}$ є проекцією, тобто $\mu_A(x) = \mathrm{P}(x \in B)$. В такому випадку з'являється можливість, використовуючи частотну інтерпретацію ймовірності, визначати належність елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$ на основі статистичного експерименту. Однак при цьому втрачається інтерпретація ступеня належності нечіткій множині, як ступеня відповідності елемента x визначальній властивості множини $\widetilde{A}$, а саме така інтерпретація формально відповідає класичному розумінню нечіткості. Крім того, що дуже важливо, однозначний перехід від нечіткої до випадкової множини неможливий – різні випадкові величини можуть мати однакову проекцію. З цих причин в цій роботі інтерпретація нечітких множин як проекцій випадкових множин не розглядається.

Таким чином, в рамках класичного розуміння нечіткості суб'єктивні експертні оцінки на цей час є єдиним джерелом для визначення функцій належності нечітких множин. Тому отримані з їх допомогою результати можуть значною мірою залежати як від самого експерта, так і від методу проведення експертної процедури. А для того, щоб задати нечітке значення невизначеного параметра, необхідно призначити кожному елементу його простору невизначеності ступінь належності нечіткому значенню цього параметра. Якщо невизначений параметр моделюється лінгвістичною змінною [99], то те саме необхідно зробити для всіх нечітких множин, які відповідають лінгвістичним значенням цього параметра. У передмові до роботи [82] М. М. Моісеєв справедливо зазначив, що отримані таким способом функції належності завжди залишаються тільки гіпотезами.

Із наведеного вище випливає, що між станом повної невизначеності (коли відомі тільки границі простору невизначеності) і станом нечіткого подання невизначеного параметра (коли стають відомими значення ступенів належності всіх елементів простору невизначеності) існує істотний логічний розрив, який значно ускладнює роботу експерта. Тому, з означених причин, важливо між станом повної невизначеності та станом нечіткого подання невизначених параметрів ввести такий проміжний стан, досягнення якого було б значно простішим для експерта.

Такий стан надалі будемо називати станом слабкого опису невизначених параметрів. Цей стан повинен передувати нечіткому стану, і в ньому повинні формуватись більш загальні, в порівнянні з нечіткими множинами, математичні структури, та діяти деякі формальні закони, які обмежували б суб'єктивні рішення експерта в процесі переходу від слабкого до нечіткого стану невизначеного параметра та контролювали несуперечність такого переходу.

Більше того було б доцільно забезпечити можливість чисто формального (без участі експерта) переходу від стану слабкого до стану нечіткого опису невизначеного параметра. Це дало б можливість на заключній стадії формування нечіткого опису невизначеного параметра різко обмежити рамки суб'єктивних рішень експерта або навіть повністю їх усунути.

З теоретичної та практичної точки зору було б доцільно, щоб слабкий опис мав також самостійне значення, тобто міг складати повноцінну альтернативу нечіткому опису невизначеного параметра і міг використовуватись незалежно від останнього, якщо з його допомогою може бути досягнута мета, поставлена дослідником, або у випадку, коли нечіткий опис з деяких причин взагалі неможливий, недоцільний чи пов'язаний із значними труднощами.

Із викладеного вище випливає, що одна із основних задач, поставлених в цій роботі, яка полягає в розробці засад теорії, котра дозволила б досягнути такої мети, є актуальною та може мати велике теоретичне і практичне значення.

Наступні розділи роботи присвячено розробці засад теорії слабких множин, яка у кінцевому підсумку повинна давати можливість:

- моделювати параметри складних систем на такому високому рівні їх невизначеності, коли невідомі не тільки детерміновані, але навіть і нечітко задані значення цих параметрів;
- використовувати слабкий рівень опису невизначених параметрів складних систем, як проміжний між повною невизначеністю та нечітким поданням цих параметрів;
- обмежувати суб'єктивний вплив експерта на результат переходу від слабкого до нечіткого стану невизначеного параметра та забезпечити формальний контроль несуперечності такого переходу;

- забезпечити можливість чисто формального несуперечного переходу від стану слабкого до стану нечіткого опису невизначеного параметра без участі експерта взагалі;
- використовувати слабкий рівень опису невизначених параметрів складних систем як самодостатній для розв'язування задач оптимального проектування та керування складними системами в умовах невизначеності частини необхідних вихідних даних;
- забезпечити можливість створення слабкого опису невизначених параметрів складної системи без використання суб'єктивних експертних оцінок цих параметрів, базуючись лише на об'єктивних даних про відомі параметри системи.

Пояснення того, як можна інтерпретувати формалізм теорії слабких множин в процесі моделювання невизначених параметрів складних систем, дано в розділі 5, де розглянуто зв'язок між слабкими та нечіткими множинами.

В розділі 6 будуть наведені приклади слабкого опису невизначених параметрів задачі та визначення значень звичайних функцій зі слабко заданими аргументами.

На завершення зробимо зауваження з приводу правомірності та доцільності використання терміну «множина» в назві нового поняття «слабка множина», яке вводиться авторами в цій роботі.

Як відомо, на множині всіх підмножин будь-якої універсальної множини X діють закони булевої алгебри з основними операціями об'єднання, перетину та доповнення множин. Саме цей факт асоціюється з терміном множина.

Для нечітких підмножин універсума X із заданими для них аналогічними операціями закони булевої алгебри в повному обсязі не виконуються, але виконуються всі закони квазібулевої алгебри, яку ще називають алгеброю Де Моргана [100].

В алгебрі Де Моргана в загальному випадку не виконуються закони виключеного третього та суперечності:

$$\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A} = \varnothing;$$

$$\widetilde{A} \cup \neg \widetilde{A} = X,$$

де $\widetilde{A}$ – довільна нечітка підмножина універсума X, $\varnothing$ – пуста множина.

Додатково до законів алгебри Де Моргана для будь-яких нечітких підмножин $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ універсума X виконується умова Кліні

$$(\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A}) \subseteq (\widetilde{B} \cup \neg \widetilde{B}),$$

яку можна також записати у вигляді тотожності:

$$(\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A}) \cap (\widetilde{B} \cup \neg \widetilde{B}) = (\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A}).$$

Останню рівність називають умовою нормальності.

Нормальна квазібулева алгебра називається алгеброю Кліні [100–102].

Таким чином, алгеброю нечітких множин є алгебра Кліні, в якій виконуються всі закони булевої алгебри, окрім законів виключеного третього та суперечності, які ослабляються до умови нормальності. На цій підставі цілком виправдовується використання терміну «множина» в назві нечітких множин.

В цій роботі вводиться новий більш універсальний клас множин – слабкі множини, розглядаються зв'язки між звичайними, нечіткими та слабкими множинами, але алгебра слабких множин, як така авторами не розглядається. Їй буде присвячена наступна монографія, в якій буде також показано, що слабкі множини підкоряються всім законам алгебри Кліні, а також мають деякі притаманні тільки їм особливості. Це дозволяє стверджувати, що слабкі множини є повноцінними представниками класу множин.

РОЗДІЛ 2

ПОНЯТТЯ СЛАБКОЇ МНОЖИНИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ

Як відомо, звичайна множина *A* в універсумі *X* повністю задається своєю характеристичною функцією $\chi_A : X \to \{0; 1\}$, де {0; 1} – двоелементна множина – область прибуття функції χ_A.

Назвемо цю область простором ступенів належності звичайної множини *A*. Цей простір складається із двох лінійно упорядкованих елементів, один із яких (елемент 0) є мінімальним та одночасно найменшим елементом простору {0; 1}, а другий (елемент 1) – максимальним і одночасно найбільшим елементом цього простору.

Будь-який елемент *x* універсума *X* належить множині *A* тоді та тільки тоді, коли його ступінь належності дорівнює найбільшому значенню належності, тобто $\chi_A(x) = 1$, що записують у вигляді $x \in A$. Для того, щоб довільний елемент $x \in X$ не належав множині *A* необхідно і достатньо, щоб його ступінь належності дорівнював найменшому ступеню належності, тобто $\chi_A(x) = 0$, що звичайно записується у вигляді $x \notin A$. Таким чином ступінь належності елемента універсума звичайній множині може мати тільки два значення: або найбільше, яке відповідає випадку належності елемента множині *A*, або найменше, яке відповідає випадку неналежності елемента множині *A*.

Нечітку множину $\widetilde{A}$ в універсумі *X* можна ототожнити з її функцією належності $\mu_A : X \to L$, де *L* – простір ступенів належностей нечіткої множини $\widetilde{A}$.

В найпростішому випадку *L* = [0; 1]. При цьому ступені належності в просторі *L* лінійно упорядковані звичайним чином, а мінімальний min *L* та максимальний max *L* елементи цього простору відповідно дорівнюють min*L* = 0, max*L* = 1. Елемент min*L* є одночасно найменшим, а елемент max*L* – найбільшим в просторі *L*.

В якості простору належностей нечіткої множини використовують також відрізок [–1; +1] (дивись, наприклад, роботу [103]), числову вісь [104], дистрибутивну ґратку [105, 106] та інші множини, наділені деякою структурою [106–110].

Для того, щоб забезпечити можливість виконання основних операцій перетину та об'єднання нечітких множин із збереженням властивостей цих операцій, притаманних алгебрі звичайних множин, простір L повинен бути частково упорядкованим, а для будь-якої пари елементів цього простору повинні існувати верхня та нижня точні грані (в окремому випадку це можуть бути найменший та найбільший і одночасно мінімальний та максимальний елементи). А для того, щоб в універсумі X могли існувати елементи, які повністю належать або повністю не належать нечіткій множині $\widetilde{A}$, в просторі L повинні існувати найбільший $\vee L$ та найменший $\wedge L$ елементи, які одночасно будуть його мінімальним $\min L$ та максимальним $\max L$ елементами.

В такому випадку можна прийняти, що довільний елемент x універсума X не належить нечіткій множині тільки тоді, коли його ступінь належності дорівнює найменшому елементу простору L, тобто виконується умова $\mu_A(x)=\min L$. В усіх інших випадках елемент універсума в тій чи іншій мірі буде належати нечіткій множині $\widetilde{A}$. Повну належність елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$ можна пов'язати з виконанням умови $\mu_A(x)=\max L$.

Таким чином, ступені належності елементів універсума нечіткій множині можуть приймати більше двох значень.

Далі буде показано, що слабку множину теж можна ототожнити з деякою векторною функцією виду $\nu_A : X \to M$, де M – простір рівнів належності елементів універсума слабкій множині.

Перед означенням слабкої множини спочатку формалізуємо поняття простору рівнів належності M, який буде виступати аналогом поняття простору ступенів належності L елементів універсума нечіткій множині, але буде відрізнятись від останнього як формально, так і семантично.

2.1 Простір напрямлених рівнів належності

Множину M_α, яка утримує найменший та найбільший елементи відносно заданого на ній бінарного відношення нестрогого досконалого порядку D_α, будемо називати *простором (множиною) ненапрямлених рівнів належності.*

Оскільки в будь-якій упорядкованій множині, яка утримує найменший та найбільший елементи, найменший елемент є одночасно єдиним мінімальним елементом а також нижньою точною гранню цієї множини, а найбільший елемент – її єдиним максимальним елементом, а також її верхньою точною гранню [111], то на цій підставі надалі будемо називати ці елементи відповідно мінімальним та максимальним і позначати $\min M_\alpha$ та $\max M_\alpha$ або $\wedge M_\alpha$ та $\vee M_\alpha$, як позначають нижню та верхню точні грані в теорії ґраток [105, 111], або використовувати класичні позначення верхньої та нижньої точних граней $\inf M_\alpha$ та $\sup M_\alpha$.

Діагональне відношення E_α на M_α будемо називати відношенням рівності, а відношення $\overline{E}_\alpha = M_\alpha^2 \backslash E_\alpha$ *відношенням нерівності ненапрямлених рівнів належності*. Відношення $S_\alpha = D_\alpha \backslash E_\alpha$, індуковане відношенням D_α, називатимемо *строгою упорядкованістю ненапрямлених рівнів належності*.

Двоелементну множину $M_\omega = \{+, -\}$ із заданим на ній нестрогим лінійним порядком D_ω, таким, що $D_\omega = \{(+, +), (+, -), (-, -)\}$, будемо називати *простором (множиною) напрямленостей рівнів належності.*

Діагональне відношення E_ω на M_ω будемо називати *рівністю*, а відношення $\overline{E}_\omega = M_\omega^2 \backslash E_\omega$ *– відношенням нерівності напрямленостей.* Відношення $S_\omega = D_\omega \backslash E_\omega$, індуковане відношенням D_ω, назвемо *строгою упорядкованістю елементів множини* M_ω. В такому випадку отримаємо:

$$E_\omega = \{(+, +), (-, -)\},\ \ \overline{E}_\omega = \{(+, -), (-, +)\},\ \ S_\omega = \{(+, -)\}.$$

Введені означення є цілком природними для теорії бінарних відношень [112, 113].

У відповідності до відношення S_ω введемо *мінімальний та максимальний елементи множини* M_ω : $\min M_\omega = -$ та $\max M_\omega = +$.

Напрямленість «–» будемо називати негативною, а напрямленість «+» – позитивною. Згідно з відношенням S_ω , по аналогії до відношення > на множині дійсних чисел, будемо говорити, що позитивна напрямленість більша за негативну. Протиставляючи ці напрямленості, будемо говорити, що позитивна напрямленість протилежна негативній і навпаки.

Множину

$$M_{\alpha\omega} \overset{df}{=} M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(\max M_\alpha ; \min M_\omega)\} \tag{2.1}$$

із заданим на ній бінарним відношенням строгого досконалого порядку $S_{\alpha\omega}$ таким, що

$$\begin{gathered} \forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega} \left((\beta, \omega_\beta) S_{\alpha\omega} (\alpha, \omega_\alpha) \overset{df}{\Leftrightarrow} \right. \\ \left. \overset{df}{\Leftrightarrow} \; (\beta S_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta \; E_\omega \, \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta \; S_\omega \, \omega_\alpha) \right), \end{gathered} \tag{2.2}$$

будемо називати *простором напрямлених рівнів належності* або просто простором (множиною) рівнів належності.

Вперше таке означення простору $M_{\alpha\omega}$ автори запропонували в роботах [12–14]. Далі в підрозділі 2.2 наводиться інший спосіб побудови простору напрямлених рівнів належності слабкої множини і показано, що обидва ці способи дають однакові результати. Однак порівняння цих способів дає можливість краще зрозуміти структуру простору $M_{\alpha\omega}$.

Із (2.1) видно, що простір напрямлених рівнів належності є декартовим добутком просторів M_α та M_ω із якого вилучено точку $(\max M_\alpha ; \min M_\omega)$.

Як відомо, елементи декартового добутку є упорядкованими парами. Перший елемент кожної такої пари, який належить множині M_α, будемо позначати першими малими літерами грецького алфавіту α, β, γ. Позначаючи другий елемент кожної такої пари, який належить множині M_ω, будемо використовувати його можливі значення + та –. Для загального позначення другого елемента упорядкованої пари будемо використовувати останні символи грецького алфавіту ω, ψ, χ та інші.

Якщо виникне необхідність у зверненні до елементів множини $M_{\alpha\omega}$ як до упорядкованих пар з конкретним значенням другого елемента пари, то будемо писати $(\alpha, +)$, $(\beta, -)$ або простіше α^{+}, β^{-}. За необхідності загального позначення як першого, так і другого елемента упорядкованої пари із множини $M_{\alpha\omega}$ будемо використовувати позначення (α, ω), (β, ψ) або $(\alpha, \omega_{\alpha})$ (β, ω_{β}), або більш коротко α^{ω}, β^{Ψ}. Для загального позначення елемента множини $M_{\alpha\omega}$ будемо використовувати літери латинського алфавіту a, b, c та інші. Наприклад,

$$a = (\alpha, +) \quad \text{або} \quad b = \beta^{-}.$$

Із означення множини напрямлених рівнів належності випливає, що цій множині належать всі елементи декартового добутку множин M_{α} та M_{ω} за виключенням елемента $(\max M_{\alpha}; \min M_{\omega})$. Крім того на цій множині повинно бути задано бінарне відношенням строгого досконалого порядку виду (2.2). Саме для того, щоб підкреслити останню обставину, будемо називати множину напрямлених рівнів належності також простором рівнів належності.

Діагональне відношення $E_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ будемо називати *рівністю напрямлених рівнів належності*. В такому випадку будемо мати:

$$\forall(\alpha, \omega_{\alpha}), (\beta, \omega_{\beta}) \in M_{\alpha\omega}((\alpha, \omega_{\alpha})\, E_{\alpha\omega}\, (\beta, \omega_{\beta}) \Leftrightarrow \alpha\, E_{\alpha}\, \beta \wedge \omega_{\alpha}\, E_{\omega}\, \omega_{\beta}).(2.3)$$

Відношення $\overline{E}_{\alpha\omega} = M^{2}_{\alpha\omega} \setminus E_{\alpha\omega}$ назвемо *нерівністю елементів множини* $M_{\alpha\omega}$. В такому випадку з урахуванням (2.3) отримаємо:

$$\forall(\alpha, \omega_{\alpha}), (\beta, \omega_{\beta}) \in M_{\alpha\omega}\, ((\alpha, \omega_{\alpha})\, \overline{E}_{\alpha\omega}\, (\beta, \omega_{\beta}) \Leftrightarrow \alpha\, \overline{E}_{\alpha}\, \beta \vee \omega_{\alpha}\, \overline{E}_{\omega}\, \omega_{\beta}).(2.4)$$

Відношення нестрогого порядку $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$, індуковане відношенням $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$, будемо називати *нестрогою лінійною упорядкованістю напрямлених рівнів належності*. Наступна теорема задає необхідні і достатні умови для відношення $D_{\alpha\omega} \subseteq M^{2}_{\alpha\omega}$, виражаючи його через відношення $D_{\alpha} \subseteq M^{2}_{\alpha}$, $E_{\omega} \subseteq M^{2}_{\omega}$ та $S_{\omega} \subseteq M^{2}_{\omega}$.

Теорема 2.1. Відношення $D_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ є відношенням лінійного нестрогого порядку напрямлених рівнів належності тоді та тільки тоді, коли для будь-яких $(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}$□ істинним є вираз

$$(\beta, \omega_\beta) D_{\alpha\omega} (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow ((\beta D_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta \, S_\omega \, \omega_\alpha)). \quad (2.5)$$

Доведення. Запишемо рівність $D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega}$ у вигляді співвідношень. Враховуючи (2.2) та (2.3), для будь-яких $(\alpha, \omega_\alpha) \in M_{\alpha\omega}$ та $(\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}$, отримаємо

$$\begin{gathered}(\beta, \omega_\beta) \, D_{\alpha\omega} (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((\beta S_\alpha \, \alpha \wedge \omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta \, S_\omega \, \omega_\alpha) \vee (\alpha E_\alpha \beta \wedge \omega_\alpha E_\omega \, \omega_\beta)).\end{gathered} \quad (2.6)$$

Зазначимо, що вираз $(\omega_\beta \, S_\omega \, \omega_\alpha)$ присутній в обох формулах (2.5) та (2.6) як операнд операції диз'юнкції. Тому для доведення теореми необхідно і достатньо показати, що

$$(\beta D_\alpha \, \alpha \wedge \omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha) \Leftrightarrow (\beta S_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha) \vee (\alpha E_\alpha \beta \wedge \omega_\alpha E_\omega \, \omega_\beta). (2.7)$$

Використовуючи символ ≡, як метапозначку рівносильності [114–116], введемо позначення $a \equiv \beta S_\alpha \, \alpha$, $b \equiv \omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha$, $c \equiv \beta E_\alpha \alpha$. Оскільки будь-які діагональні відношення симетричні, а E_ω та E_α є діагональними відношеннями, то

$$\omega_\alpha E_\omega \, \omega_\beta \equiv \omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha \equiv b, \text{ а } \alpha E_\alpha \beta \equiv \beta E_\alpha \, \alpha \equiv c.$$

Враховуючи це, перепишемо праву частину виразу (2.7), використовуючи введені позначення у вигляді: $(a \wedge b) \vee (c \wedge b)$. Використовуючи дистрибутивні властивості диз'юнкції та кон'юнкції, отримаємо ланцюжок рівносильностей

$$\begin{gathered}(a \wedge b) \vee (c \wedge b) \equiv [(a \wedge b) \vee c] \wedge [(a \wedge b) \vee b] \equiv [(a \wedge b) \vee c] \wedge b \equiv \\ \equiv (c \vee a) \wedge (c \vee b) \wedge b) \equiv (c \vee a) \wedge b.\end{gathered}$$

Підставляючи в останній вираз замість a, b, c їх значення, отримаємо $(\alpha E_\alpha \beta \vee \beta S_\alpha \alpha) \wedge (\omega_\beta \, E_\omega \, \omega_\alpha)$.

Оскільки $D_\alpha = S_\alpha \cup E_\alpha$, то $(\beta E_\alpha\, \alpha \vee \beta S_\alpha\, \alpha) \equiv \beta D_\alpha\, \alpha$. З урахуванням цього останній вираз отримає вигляд $\beta D_\alpha \alpha \wedge \omega_\beta\, E_\omega\, \omega_\alpha$, що і потрібно було довести.♦

Тепер доведемо теорему про найменший та найбільший елементи множини $M_{\alpha\omega}$, позначаючи їх відповідно $\min M_{\alpha\omega}$ та $\max M_{\alpha\omega}$ або $\wedge M_{\alpha\omega}$ та $\vee M_{\alpha\omega}$.

Теорема 2.2. Множина напрямлених рівнів належності утримує найменший та найбільший елементи, для яких справедливі рівності

$$\min M_{\alpha\omega} = (\min M_\alpha,\ \min M_\omega); \tag{2.8}$$

$$\max M_{\alpha\omega} = (\max M_\alpha,\ \max M_\omega). \tag{2.9}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що існує найменший елемент множини $M_{\alpha\omega}$, який задовольняє рівність (2.8). Як відомо [117], елемент $\min M_{\alpha\omega}$ буде найменшим відносно відношення $D_{\alpha\omega}$ тоді та тільки тоді, коли

$$\forall(\alpha,\ \omega)\in M_{\alpha\omega}\ ((\alpha,\ \omega)\ D_{\alpha\omega} \min M_{\alpha\omega}).$$

Якщо в будь-якій частково упорядкованій множині існує найменший елемент, то він єдиний [111]. Припустимо, що $(\min M_\alpha,\ \min M_\omega)$ не є мінімальний елемент множини $M_{\alpha\omega}$. Тоді повинен існувати відмінний від нього елемент $(\beta,\ \omega)\in M_{\alpha\omega}$, такий, що

$$(\min M_\alpha,\ \min M_\omega)\ D_{\alpha\omega}\ (\beta,\ \omega) \wedge (\min M_\alpha, \min M_\omega)\ \overline{E}_{\alpha\omega}\ (\beta,\ \omega),$$

або, що рівносильно, $(\min M_\alpha,\ \min M_\omega)\ S_{\alpha\omega}\ (\beta,\ \omega)$.

Але, згідно з (2.2)

$$(\min M_\alpha, \min M_\omega)\ S_{\alpha\omega}\ (\beta,\ \omega) \equiv$$
$$\equiv (\min M_{\alpha\square}\ S_{\alpha\square}\ \beta\ \wedge \min M_\omega E_\omega\ \ \omega) \vee \min M_\omega S_\omega\ \omega.$$

Оскільки співвідношення $\min M_\alpha S_{\alpha\ \square}\beta$ та $\min M_\omega S_\omega \omega$ суперечать означенню найменшого елемента, то отриманий вираз є хибним. Це означає, що зроблене припущення невірне, а значить елемент

$(\min M_\alpha, \min M_\omega)$ множини $M_{\alpha\omega}$ є найменшим елементом цієї множини, що і потрібно було довести.♦

Існування найбільшого елемента множини $M_{\alpha\omega}$ і тотожність рівності (2.9) доводиться аналогічно. Тому це доведення опускаємо.

Як вже було відмічено раніше, в будь-якій упорядкованій множині, яка утримує найменший та найбільший елементи, найменший елемент є одночасно єдиним мінімальним елементом та нижньою точною гранню цієї множини, а найбільший елемент – єдиним її максимальним елементом та верхньою точною гранню. Тому на цій підставі надалі будемо називати елементи $\min M_{\alpha\omega}$ та $\max M_{\alpha\omega}$ множини $M_{\alpha\omega}$ відповідно мінімальним та максимальним і позначати також $\wedge M_{\alpha\omega}$ та $\vee M_{\alpha\omega}$ або $\inf M_{\alpha\omega}$ та $\sup M_{\alpha\omega}$.

2.2 Геометрична інтерпретація простору напрямлених рівнів належності

Введемо геометричну інтерпретацію простору напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$. Для цього спочатку дамо геометричне тлумачення простору ненапрямлених рівнів належності M_α, який будемо зображати відрізком прямої. Ліва гранична точка цього відрізка буде відповідати мінімальному елементу $\wedge M_\alpha$ простору M_α, а права – максимальному елементу $\vee M_\alpha$ цього простору (рис. 2.1). Точки такого відрізка будуть відповідати ненапрямленим рівням належності, упорядкованим згідно з діючим на цьому просторі строгим лінійним порядком S_α зліва направо аналогічно упорядкуванню дійсних чисел на відрізку числової прямої.

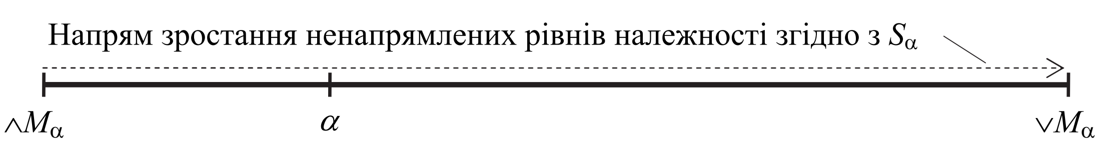


Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація простору ненапрямлених рівнів належності

Надалі зображену на рис. 2.1 пряму будемо називати *віссю ненапрямлених рівнів належності*, або більш коротко – ненапрямленою віссю.

Щоб отримати геометричне зображення декартового добутку $M_\alpha \times M_\omega$ використаємо декартові осі координат. По осі абсцис відкладемо простір ненапрямлених рівнів належності, а по осі ординат – знизу вверх два елементи простору напрямленостей в порядку їх зростання згідно зі строгим лінійним порядком S_ω на M_ω. В такому випадку простір напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$, який складається із упорядкованих пар (α, ω), $\alpha \in M_\alpha$, $\omega \in M_\omega$ і не утримує пари $(\vee M_\alpha; \wedge M_\omega)$, буде зображатись усіма точками відрізка прямої, розташованого на рівні напрямленості + і внутрішніми та лівою граничною точками відрізка, розташованого на рівні негативної напрямленості (рис. 2.2).

Граничні точки верхнього відрізка на цьому рисунку відповідають точкам $(\wedge M_\alpha; +)$ та $(\vee M_\alpha; +)$ простору $M_{\alpha\omega}$.

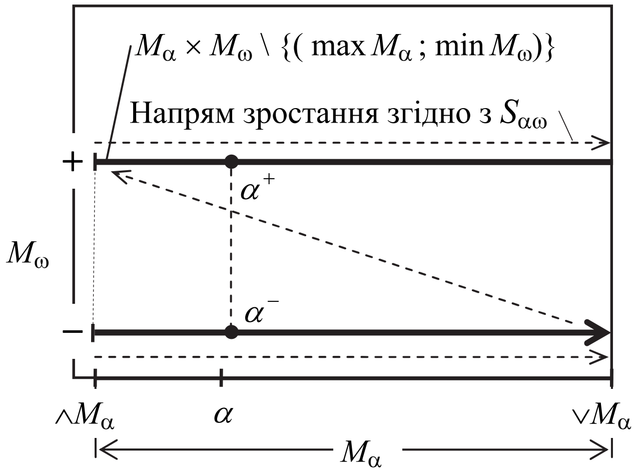


Рисунок 2.2 – Геометричне зображення простору напрямлених рівнів належності в декартових осях

Права гранична точка нижнього відрізка не входить в простір $M_{\alpha\omega}$ (про це говорить стрілка з правої сторони цього відрізка), а ліва границя цього відрізка відповідає точці $(\wedge M_\alpha ; -)$ простору $M_{\alpha\omega}$. Напрям зростання значень напрямлених рівнів належності згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$ показано на рисунку пунктирними стрілками.

Введемо важливе для теорії слабких множин поняття *осі напрямлених рівнів належності* як єдиного відрізка прямої, точки якого взаємно однозначно відповідають всім елементам простору $M_{\alpha\omega}$ і упорядковані зліва направо згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$. Із рис. 2.2 видно, що зображений на цьому рисунку нижній відрізок без правої граничної точки та верхній відрізок із обома граничними точками можна з'єднати неперервно так, що ліва границя верхнього відрізка, яка відповідає точці $\wedge M_\alpha{}^{+}$, стане одночасно правою граничною точкою нижнього відрізка. В результаті ми отримаємо вісь напрямлених рівнів належності, зображену на рис. 2.3.

Надалі вісь напрямлених рівнів належності будемо також називати більш коротко *напрямленою віссю*.

Розглянемо також інший можливий спосіб створення простору напрямлених рівнів належності.

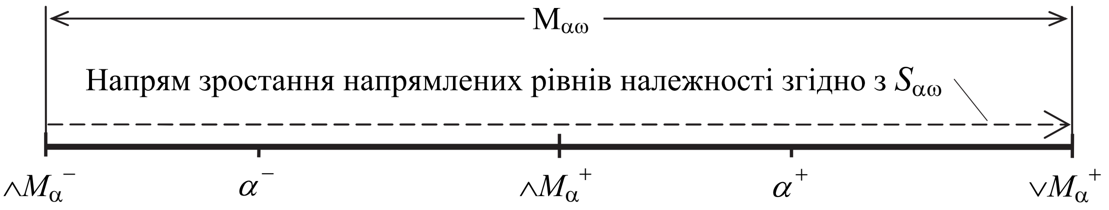


Рисунок 2.3 – Вісь напрямлених рівнів належності

Множину напрямлених рівнів належності можна задати як область значень $\mathrm{Im}\,\mathrm{h}$ деякого оператора h: $M_\alpha \times M_\omega \to M_\alpha \times M_\omega$, область означення $\mathrm{Dom}\,\mathrm{h}$ та область прибуття якого є декартів добуток $M_\alpha \times M_\omega$. Оператор h переводить декартів добуток $M_\alpha \times M_\omega$ в себе так, що:

$$\mathrm{h}(\vee M_\alpha;\ \wedge M_\omega) = (\wedge M_\alpha;\ \vee M_\omega); \tag{2.10}$$

$$\forall \alpha^\omega \in M_\alpha \times M_\omega (\alpha^\omega \neq (\vee M_\alpha;\ \wedge M_\omega) \Rightarrow \mathrm{h}(\alpha^\omega) = \alpha^\omega). \tag{2.11}$$

Неважко бачити, що множина $M_{\alpha\omega}$ означена з допомогою виразу (2.1) та область значень $\mathrm{Im}\,\mathrm{h}$ оператора h складаються із одних і тих же елементів. Справді, згідно з (2.1) множина $M_{\alpha\omega}$ утримує всі елементи декартового добутку $M_\alpha \times M_\omega$, окрім елемента $(\vee M_\alpha;\ \wedge M_\omega)$. Але область значень оператора h теж складається саме з цих елементів, оскільки згідно з (2.10)–(2.11) всі елементи декартового добутку $M_\alpha \times M_\omega$, окрім елемента $(\vee M_\alpha;\ \wedge M_\omega)$, переводяться оператором h без змін в область значень, а елемент $(\vee M_\alpha;\ \wedge M_\omega)$, переводиться оператором h в елемент $(\wedge M_\alpha;\ \vee M_\omega)$. В результаті отримуємо $\mathrm{Im}\,\mathrm{h} = M_{\alpha\omega}$, в чому і потрібно було переконатись.

Геометрична інтерпретація перетворень декартового добутку просторів M_α та M_ω в простір напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$ з допомогою оператора h показано на рис. 2.4.

Декартів добуток множин M_α та M_ω на цьому рисунку показано в вигляді двох відрізків напрямленої осі $[\wedge M_\alpha^-;\ \vee M_\alpha^-]$ та $[\wedge M_\alpha^+;\ \vee M_\alpha^+]$, які не мають спільних точок.

Всі точки декартового добутку $M_\alpha \times M_\omega$, крім точки $\vee M_\alpha^-$, відображаються оператором h в самих себе, а максимальний негативно напрямлений $\vee M_\alpha^-$ та мінімальний позитивно напрямлений $\wedge M_\alpha^+$ рівні належності суміщаються так, що в області значень оператора h залишається лише точка $\wedge M_\alpha^+$: $\mathrm{h}(\vee M_\alpha^-) = \mathrm{h}(\wedge M_\alpha^+) = \wedge M_\alpha^+$.

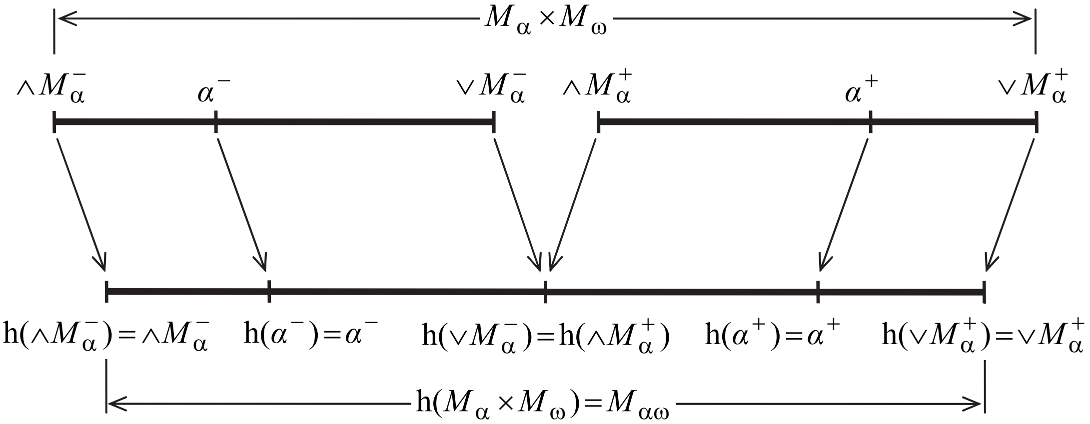


Рисунок 2.4 – Геометрична інтерпретація множин $\mathrm{Dom}\,\mathrm{h}$ та $\mathrm{Im}\,\mathrm{h}$

Неважко бачити, що аналогічного результату можна досягнути, якщо замість умов (2.10)–(2.11) використати умови

$$\mathrm{h}(\wedge M_\alpha;\ \vee M_\omega) = (\vee M_\alpha;\ \wedge M_\omega);$$

$$\forall \alpha^\omega \in M_\alpha \times M_\omega (\alpha^\omega \neq (\wedge M_\alpha;\ \vee M_\omega) \Rightarrow \mathrm{h}(\alpha^\omega) = \alpha^\omega),$$

згідно з якими точки $\vee M_{\alpha}^{-}$ та $\wedge M_{\alpha}^{+}$ знову суміщаються, але в області значень оператора h на цей раз залишається точка $\vee M_{\alpha}^{-}$:

$$\mathrm{h}(\vee M_{\alpha}^{-}) = \mathrm{h}(\wedge M_{\alpha}^{+}) = \vee M_{\alpha}^{-}.$$

Всі інші точки множини $\mathrm{Im}\,\mathrm{h}$ залишаються незмінними.

Для збереження рівності $\mathrm{Im}\,\mathrm{h}$ = $M_{\alpha\omega}$ означення (2.1) необхідно замінити відповідно на $M_{\alpha\omega} \overset{df}{=} M_{\alpha} \times M_{\omega} \setminus \{(\min M_{\alpha}; \max M_{\omega})\}$, залишивши без змін умову (2.2).

Таким чином, ми отримуємо ті ж самі множину напрямлених рівнів належності та область значень оператора h з точністю до позначень суміщених оператором h точок $\vee M_{\alpha}^{-}$ та $\wedge M_{\alpha}^{+}$.

Із зробленого аналізу наведених способів побудови простору напрямлених рівнів належності випливає, що для побудови простору напрямлених рівнів належності не є суттєвим, яка саме із точок $\vee M_{\alpha}^{-}$ чи $\wedge M_{\alpha}^{+}$ буде залишена в просторі $M_{\alpha\omega}$. З цієї точки зору позначення $\vee M_{\alpha}^{-}$ та $\wedge M_{\alpha}^{+}$ для точки $\mathrm{h}(\vee M_{\alpha}^{-}) = \mathrm{h}(\wedge M_{\alpha}^{+})$ можна вважати синонімами.

Надалі всюди в цій роботі будемо використовувати означення (2.1), яке відповідає результатам дії оператора h, означеного умовами (2.10), (2.11).

2.3 Означення слабкої множини

Для позначення слабких множин будемо використовувати великі літери латинського алфавіту, як це прийнято і у випадку звичайних та нечітких множин. Для того, щоб легко було відрізнити позначення нечіткої та слабкої множин в математичних формулах для нечітких множин будемо використовувати зверху відповідної літери значок одинарної тильди, а для слабких множин – значок подвійної тильди. Наприклад, позначення A, $\tilde{A}$ та $\tilde{\tilde{A}}$ будуть означати відповідно звичайну, нечітку та слабку множини.

З використанням оговорених позначень та введених вище понять дамо означення слабкої множини.

Слабкою множиною $\approx{A}$ *в універсумі* X назвемо множину упорядкованих пар

$$\{(x, \nu_A(x)) \mid x \in X \wedge \nu_A\colon X \to M_{\alpha\omega}\}. \tag{2.12}$$

Функцію ν_A будемо називати *функцією напрямлених рівнів*, або просто функцією рівнів слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ і надалі будемо принципово розрізняти зміст термінів «рівень» та «ступінь» належності. Тому цю функцію не слід плутати із функцією належності елементів універсума деякій нечіткій множині $\tilde{A}$, яка задає конкретні ступені належності цих елементів множині $\tilde{A}$ і тим самим формує деяку, в загальному випадку нечітку множину в X. Що стосується слабких множин, то ступені належності їм елементів універсума не існують, а рівні належності мають особливу властивість, яку ми назвали напрямленістю. Тим самим функція рівнів не формує в X ніякої множини в традиційному розумінні цього слова, але створює деяку більш загальну структуру, яка передує традиційній нечіткій та в окремому випадку чіткій множині. Саме цю структуру, яка є передмножиною в традиційному розумінні слова «множина», ми і будемо називати слабкою множиною. Тому, якщо $\nu_A(x) = (\alpha, +)$ або $\nu_A(x) = (\alpha, -)$, то замість «x належить слабкій множині $\overset{\approx}{A}$ зі ступенем належності $(\alpha, +)$ (відповідно $(\alpha, -)$)» будемо говорити, що x знаходиться по відношенню до слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ на позитивному (негативному) рівні належності α, або, що x слабко належить $\overset{\approx}{A}$ на позитивному (негативному) рівні α, або ще простіше, що x α-плюс (α-мінус) слабко належить $\overset{\approx}{A}$. Замість α-плюс слабко (α-мінус слабко) будемо також писати більш коротко α^+-слабко (α^--слабко) і позначати відповідно $\nu_A(x) = \alpha^+$ $(\nu_A(x) = \alpha^-)$.

Із означення (2.12) видно, що слабка множина однозначно задається своєю функцією рівнів, тому надалі для позначення слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ ми будемо використовувати також її функцію рівнів ν_A та формально ототожнювати слабку множину з цією функцією.

Введемо також поняття функцій ненапрямлених рівнів та напрямленостей слабкої множини.

Відомо, що будь-яку функцію, область прибуття якої є декартів добуток двох множин A та B, можна подати як пару функцій зі спільною областю означення та областями значень в множинах A та B відповідно [118]. Оскільки область прибуття функції напрямлених рівнів належності ν_A: $X \rightarrow M_{\alpha\omega}$ слабкої множини $\approx\!\!\!\!A$ є декартів добуток множин M_α та M_ω без елемента ($\max M_\alpha$; $\min M_\omega$), то її можна подати як пару функцій

$$\alpha_A : X \rightarrow M_\alpha\,; \tag{2.13}$$

$$\omega_A : X \rightarrow M_\omega\,, \tag{2.14}$$

таких, що ($\alpha_A(x) = 1 \;\Rightarrow\; \omega_A(x) \neq -) \wedge (\omega_A(x) = - \;\Rightarrow\; \alpha_A(x) \neq 1)$, $\forall x \in X$.

Першу функцію пари α_A, яка ставить у відповідність кожному елементу універсума X деякий ненапрямлений рівень належності, будемо називати *функцією ненапрямлених рівнів належності слабкої множини* $\overset{\approx}{A}$, або просто – функцією її ненапрямлених рівнів. Другу функцію пари ω_A, яка задає тим самим елементам напрямленість рівнів належності, отриманих ними за допомогою першої функції, будемо називати *функцією напрямленостей рівнів належності слабкої множини* $\overset{\approx}{A}$, або простіше – її функцією напрямленостей. Таким чином, функцію рівнів слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ можна подати у векторному вигляді як функцію ν_A, або в координатному – як пару функцій (α_A , ω_A).

З урахуванням введених позначень для кожного x його образ при відображені ν_A можна подати як $\nu_A(x)$, або як пару ($\alpha_A(x)$, $\omega_A(x)$), $\alpha_A(x) \in M_\alpha$, $\omega_A(x) \in M_\omega$. Функція рівнів, а також функції ненапрямлених рівнів та напрямленостей інших слабких множин будуть мати відповідно інші індекси. Наприклад, для слабкої множини $\overset{\approx}{B}$ ці функції будуть позначатись відповідно ν_B , α_B , ω_B .

Введемо поняття пустої та повної слабкої множини.

В теорії звичайних множин існує поняття пустої множини $\varnothing$, до якої не належить ні один елемент універсума. При цьому характеристична функція пустої множини всюди на X дорівнює найменшому елементу простору належностей, тобто $\forall x\in X(\chi_{\varnothing}(x) = 0)$.

В теорії нечітких множин теж введено поняття пустої нечіткої множини $\tilde{\varnothing}$, ступінь належності якій кожного елемента універсума дорівнює найменшому елементу простору ступенів належностей, тобто $\forall x\in X(\mu_{\varnothing}(x) = \wedge L)$.

Аналогічне поняття введемо і для слабких множин, позначаючи *слабку пусту множину* $\overset{\approx}{\varnothing}$:

$$\overset{\approx}{\varnothing} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x\in X(\nu_{\varnothing}(x)\ E_{\alpha\omega} \wedge M^{-}). \qquad (2.15)$$

Згідно з означенням (2.15) слабка множина пуста тільки в тому випадку, коли рівні належності всіх елементів універсума цій слабкій множині дорівнюють найменшому елементу простору напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$.

Введемо також поняття *повної слабкої множини в* X, позначаючи її $\overset{\approx}{X}$:

$$\overset{\approx}{X} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x\in X(\nu_{X}(x)\ E_{\alpha\omega} \vee M^{+}). \qquad (2.16)$$

Повна слабка множина в деякому розумінні є антиподом пустої слабкої множини. Згідно з означенням (2.16) слабка множина повна, тільки якщо всі елементи універсума мають по відношенню до неї максимально можливий напрямлений рівень належності $\vee M^{+}$.

Носієм слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в X будемо називати таку звичайну множину $\mathrm{supp}\,\overset{\approx}{A}$, що

$$\mathrm{supp}\,\overset{\approx}{A} \overset{df}{=} \{x\in X \mid \nu_{A}(x)\ S_{\alpha\omega} \wedge M^{-}\}. \qquad (2.17)$$

Із означення (2.17) випливає, що носій слабкої множини є звичайною підмножиною універсума, кожен елемент якої має напрямлений рівень належності по відношенню до слабкої множини $\overset{\approx}{A}$, строго більший за найменший напрямлений рівень належності простору $M_{\alpha\omega}$ у відповідності до означеного на цьому просторі строгого лінійного порядку $S_{\alpha\omega}$. Враховуючи означення (2.2) строгого лінійного порядку $S_{\alpha\omega}$ на просторі напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$, перепишемо означення (2.17) в координатному вигляді:

$$\operatorname{supp}\tilde{\tilde{A}} = \{x\in X\,|(\alpha_A(x)\; S_\alpha\; 0 \wedge \omega_A(x)\; E_\omega\, -) \vee (\omega_A(x)\; E_\omega\, +).$$

Потужністю $\operatorname{card}\tilde{\tilde{A}}$ *слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$ будемо називати потужність її носія, тобто

$$\operatorname{card}\tilde{\tilde{A}} \overset{df}{=} \operatorname{card}\operatorname{supp}\tilde{\tilde{A}}\,.$$

Таким чином, з урахуванням означення (2.17)

$$\operatorname{card}\tilde{\tilde{A}} = \operatorname{card}\{x\in X\,|\,\nu_A(x)\; S_{\alpha\omega}\, \wedge M^-\}. \tag{2.18}$$

Із (2.18) видно, що потужність слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ визначається тільки тими елементами універсума X, які мають напрямлений рівень належності цій слабкій множині більший за мінімальний.

Аналогічна ситуація має місце і у випадку звичайних множин, заданих в універсумі X. Дійсно, звичайна множина A в універсумі X задається характеристичною функцією $\chi_A : X \to \{0; 1\}$ згідно з якою

$$A = \{x\in X\,|\,\chi_A(x) = 1\}.$$

Оскільки елементи універсума можуть мати тільки два ступені належності звичайній множині, то

$$\{x\in X\,|\,\chi_A(x) = 1\} = \{x\in X\,|\,\chi_A(x) > 0\},$$

а значить $\operatorname{card}A = \operatorname{card}\{x\in X\,|\,\chi_A(x) > 0\}$.

Як і у випадку звичайних множин, потужність слабкої множини може не збігатися з потужністю універсума, в якому вона задана.

Слабку множину $\tilde{\tilde{A}}$ таку, що

$$\operatorname{supp}\tilde{\tilde{A}} = \{x_i\in X\,|\,i = 1,\dots, n;\, n\in \mathrm{N}\},$$

де N – множина всіх натуральних чисел, будемо називати *скінченною*. Її потужність $\operatorname{card}\tilde{\tilde{A}} = n$.

Слабку множину $\approx{A}$ таку, що $\mathrm{card}\,\overset{\approx}{A} = \mathrm{card}\,\mathrm{N}$, будемо називати *зчисленною* слабкою множиною, а слабку множину $\overset{\approx}{A}$ таку, що

$$\mathrm{card}\,\overset{\approx}{A} = \mathrm{card}\,\mathrm{R},$$

де R – множина дійсних чисел, будемо називати *континуальною.* Слабкі множини, які не є скінченими будемо називати *нескінченими.*

По аналогії до нечітких множин для випадку скінченої слабкої множини будемо вживати позначення

$$\overset{\approx}{A} \overset{df}{=} x_1|\nu_A(x_1) + x_2|\nu_A(x_2) + \ldots + x_n|\nu_A(x_n) \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_\mathrm{i} \,|\, \nu_A(x_\mathrm{i}) \overset{df}{=} \bigcup_{i=1}^{n} x_i \,|\, \nu_A(x_i).$$

Для зчисленної множини $\overset{\approx}{A}$ в аналогічних позначеннях будемо вживати знак ∞ замість символу n:

$$\overset{\approx}{A} \overset{df}{=} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} x_\mathrm{i} \,|\, \nu_A(x_\mathrm{i}) \overset{df}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i \,|\, \nu_A(x_i).$$

Для незчисленної (зокрема континуальної) слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в універсумі X будемо також вживати позначення

$$\overset{\approx}{A} \overset{df}{=} \bigcup_{x\in X} x|\nu_A(x) \overset{df}{=} \int_{x\in X} x|\nu_A(x).$$

2.4 Слабкі множини з простором ненапрямлених рівнів належності $M_\alpha = [0; 1]$

Надалі в ролі множини ненапрямлених рівнів належності слабкої множини будемо розглядати відрізок [0; 1] із заданими на ньому природними відношеннями строгого та нестрогого досконалих порядків $\geq$, $>$ та оберненими до них лінійних порядків $\leq$, $<$, а також діагональним відношенням $=$ та його доповненням $\neq$.

Множина $M_\alpha = [0;\ 1]$ утримує мінімальний та максимальний елемент $\min M_\alpha = 0$ та $\max M_\alpha = 1$, які є одночасно її єдиними найменшим та найбільшим елементами, а також відповідно нижньою $\wedge M_\alpha$ ($\inf M_\alpha$) та верхньою $\vee M_\alpha$ ($\sup M_\alpha$) точними гранями.

Згідно з (2.8), (2.9) множина

$$M_{\alpha\omega} = [0;\, 1] \times \{+, -\} \setminus \{(1; -)\}$$

утримує мінімальний елемент $\min M_{\alpha\omega} = 0^-$ та максимальний елемент $\max M_{\alpha\omega} = 1^+$, які є одночасно найменшим та найбільшим елементами, а також нижньою $\wedge M_{\alpha\omega}$ ($\inf M_{\alpha\omega}$) та верхньою $\wedge M_{\alpha\omega}$ ($\sup M_{\alpha\omega}$) точними гранями простору $M_{\alpha\omega}$.

Для зручності та однотипності позначень відношення S_ω, D_ω, E_ω, $\overline{E}_\omega$ на множині $M_\omega = \{+, -\}$, а також відношення $S_{\alpha\omega}$, $D_{\alpha\omega}$, $E_{\alpha\omega}$, $\overline{E}_{\alpha\omega}$ на множині $M_{\alpha\omega}$ будемо позначати однаково, аналогічно відповідним відношенням на множині дійсних чисел знаками $>$, $\geq$, $=$, $\neq$, а відношення, обернені до відношень S_ω, $S_{\alpha\omega}$ та D_ω, $D_{\alpha\omega}$, – відповідно знаками $<$, $\leq$.

З урахуванням цих домовленостей перепишемо властивості строгого порядку, рівності, нерівності та теорему про нестрогий порядок на множині напрямлених рівнів належності для $M_{\alpha\omega}$ у відповідності до (2.2)–(2.5) у вигляді таких тотожно істинних за означенням еквіваленцій:

$$\begin{gathered}\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\ ((\beta, \omega_\beta) > (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\beta > \alpha \ \wedge\ \omega_\beta = \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta > \omega_\alpha)\,);\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\ ((\alpha, \omega_\alpha) = (\beta, \omega_\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta \ \wedge\ \omega_\alpha = \omega_\beta\ ); \tag{2.20}$$

$$\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\ ((\alpha, \omega_\alpha) \neq (\beta, \omega_\beta) \Leftrightarrow \alpha \neq \beta \ \vee\ \omega_\alpha \neq \omega_\beta\ ); \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered}\forall(\alpha, \omega_\alpha), (\beta, \omega_\beta) \in M_{\alpha\omega}\ ((\beta, \omega_\beta) \geq (\alpha, \omega_\alpha) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\beta \geq \alpha \ \wedge\ \omega_\beta = \omega_\alpha) \vee (\omega_\beta > \omega_\alpha)\,).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Слід звернути увагу на властивість (2.19), згідно з якою будь-який позитивний рівень належності більший за будь-який негативний. Зокрема, 0^+ більше будь-якого негативно напрямленого рівня належності. Наприклад: $0^+ > 0{,}99^-$.

Геометричне тлумачення властивостей (2.19)–(2.22) легко виконати з допомогою осі напрямлених рівнів належності (рис. 2.3), яка за умови $M_\alpha = [0;\, 1]$ буде мати вигляд, показаний на рис. 2.5.

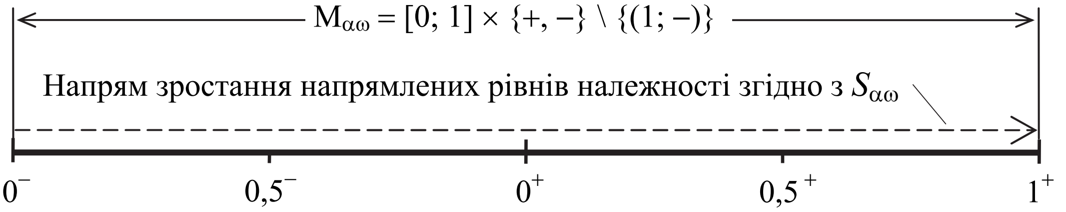


Рисунок 2.5 – Вісь напрямлених рівнів належності при $M_\alpha = [0;\, 1]$

Для випадку $M_\alpha = [0;\, 1]$ означення (2.15), пустої слабкої множини та означення (2.17) носія слабкої множини можна записати відповідно у вигляді

$$\tilde{\tilde{\varnothing}} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X\, (\nu_{\varnothing}(x) = 0^-); \tag{2.23}$$

$$\operatorname{supp} \tilde{\tilde{A}} \overset{df}{=} \{x \in X \mid \nu_A(x) > 0^-\}. \tag{2.24}$$

Згідно з прийнятими домовленостями означення (2.23) можна висловити таким чином: слабка множина пуста тільки в тому випадку, коли всі елементи універсума належать їй 0^--слабко. Семантично означення пустої слабкої множини задає умови, коли в універсумі X не існує не тільки непустих звичайних та нечітких множин, але й більш загальної структури, яку ми назвали слабкою множиною. Згідно з означенням (2.23) непуста слабка множина починає існувати в універсумі X, якщо хоч один його елемент буде мати більший за $\min M_{\alpha\omega} = 0^-$ напрямлений рівень належності. Слід зазначити, що такий рівень належності може бути негативно напрямленим, тобто меншим за 0^+, або може бути рівним 0^+.

Враховуючи, що всі елементи універсума мають по відношенню до пустої слабкої множини напрямлений рівень належності 0^-, введемо також зручне позначення цієї множини з напівжирним нулем $\tilde{\tilde{\mathbf{0}}}^-$. Таким чином, запис $\tilde{\tilde{\mathbf{0}}}^-$ з напівжирним нулем буде означати не окремий напрямлений рівень належності, а те, що напрямлені рівні слабкої належності всіх елементів універсума дорівнюють 0^{-}.

Згідно з означенням (2.24) носієм слабкої множини є звичайна множина, кожен елемент якої має напрямлений рівень належності по відношенню до слабкої множини, більший за 0^{-} у відповідності до заданого в просторі напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$ строгого порядку $S_{\alpha\omega}$. Із наведених означень випливає, що має місце тотожно істинна еквіваленція:

$$\overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{\varnothing} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{supp}\overset{\approx}{A} = \varnothing. \tag{2.25}$$

Таким чином, слабка множина пуста тоді і тільки тоді, коли її носій є звичайною пустою множиною.

Для випадку, коли простір ненапрямлених рівнів належності дорівнює відрізку [0; 1], означення (2.16) повної слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в X можна переписати у вигляді

$$\overset{\approx}{X} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X\,(\nu_{X}(x) = 1^{+}). \tag{2.26}$$

Згідно з означенням (2.26) слабка множина повна, тільки якщо всі без виключення елементи універсума належать їй на максимально можливому рівні 1^{+}. Це той крайній випадок, коли можна вважати, що слабка множина перетворюється в звичайний універсум.

Якщо вважати, що максимально можливий напрямлений рівень належності 1^{+} означає повну належність слабкій множині, то згідно з означенням (2.26) слабка множина повна, тільки якщо всі елементи універсума повністю їй належать. Таким чином, повна слабка множина є слабким аналогом універсума.

Враховуючи, що всі елементи універсума мають по відношенню до повної слабкої множини напрямлений рівень належності 1^{+}, введемо також більш зручне позначення цієї множини з напівжирним написанням одиниці $\overset{\approx}{\mathbf{1}}^{+}$. Таким чином запис $\overset{\approx}{\mathbf{1}}^{+}$ з напівжирною одиницею буде означати не окремий напрямлений рівень належності, а те, що напрямлені рівні слабкої належності всіх елементів універсума дорівнюють 1^+. Таке позначення повної слабкої множини зручне ще й тим, що воно не залежить від позначення універсума.

Введемо поняття *множини всіх слабких підмножин* $\wp(\tilde{\tilde{X}})$ *універсума X* як степінь X множини рівнів належності $M_{\alpha\omega}$, тобто

$$\wp(\tilde{\tilde{X}}) \overset{df}{=} M_{\alpha\omega}^{X} = \{\nu \mid \nu : X \to M_{\alpha\omega}\}.$$

Таким чином, під множиною всіх слабких множин універсума X будемо розуміти сімейство всіх можливих функцій із X в множину направлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$. Тобто $\wp(\tilde{\tilde{X}})$ є сімейством всіх можливих функцій напрямлених рівнів, кожна із яких має область означення X та область прибуття $M_{\alpha\omega}$.

Незалежно від позначення універсума будемо позначати множини всіх слабких підмножин універсума також у вигляді $\wp(\tilde{\tilde{\mathbf{1}}}^+)$.

2.5 Основні бінарні відношення слабких множин

Задамо на множині всіх слабких підмножин $\wp(\tilde{\tilde{X}})$ універсума X бінарні відношення рівності та включення.

Означимо бінарне *відношення рівності слабких множин* $\tilde{\tilde{A}}$ та $\tilde{\tilde{B}}$ у вигляді

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{B}} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X (\ \nu_A(x) = \nu_B(x)\ ). \tag{2.27}$$

Із означення (2.27) випливає, що дві слабкі множини рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх функції напрямлених рівнів належності.

Виражаючи напрямлені рівні належності $\nu_A(x)$, $\nu_B(x)$ через координатні функції (2.13), (2.14) і підставляючи отримані результати в (2.27), отримаємо:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{B}} \Leftrightarrow \forall x \in X (\ (\alpha_A(x), \omega_A(x)) = (\alpha_B(x), \omega_B(x)). \tag{2.28}$$

Враховуючи (2.20), перепишемо твердження (2.28) в такому рівносильному вигляді:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{B}} \Leftrightarrow \forall x \in X(\ \alpha_A(x) = \alpha_B(x)\ \wedge\ \omega_A(x) = \omega_B(x)\ ). \tag{2.29}$$

Із (2.29) видно, що необхідною і достатньою умовою рівності будь-яких слабких множин є рівність їх функцій ненапрямлених рівнів належності та напрямленостей.

Відношення нерівності слабких множин $\tilde{\tilde{A}}$ та $\tilde{\tilde{B}}$ введемо як заперечення їх рівності:

$$\tilde{\tilde{A}} \neq \tilde{\tilde{B}} \overset{df}{=} \exists x \in X(\ \nu_A(x) \neq \nu_B(x)\ ).$$

Враховуючи (2.28) та (2.29), отримаємо:

$$\tilde{\tilde{A}} \neq \tilde{\tilde{B}} \Leftrightarrow \exists x \in X(\ (\alpha_A(x), \omega_A(x)\ ) \neq (\alpha_B(x), \omega_B(x)\ )\ ) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x \in X(\alpha_A(x) \neq \alpha_B(x)\ \vee\ \omega_A(x) \neq \omega_B(x)).$$

Означимо бінарне *відношення нестрогого включення для слабких множин* $\tilde{\tilde{A}}$ та $\tilde{\tilde{B}}$ в X у вигляді

$$\tilde{\tilde{A}} \supseteq \tilde{\tilde{B}} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X(\ \nu_A(x) \geq \nu_B(x)\ ). \tag{2.30}$$

З урахуванням (2.22) отримаємо:

$$\tilde{\tilde{A}} \supseteq \tilde{\tilde{B}} \Leftrightarrow \forall x \in X(\ (\alpha_A(x), \omega_A(x)\ ) \geq (\alpha_B(x), \omega_B(x)\ )\ ) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in X(\ (\alpha_A(x) \geq \alpha_B(x)\ \wedge \omega_A(x) = \omega_B(x)) \vee (\omega_A(x) > \omega_B(x))\ ). \tag{2.31}$$

Відповідно до (2.30) строге включення слабкою множиною $\tilde{\tilde{A}}$ в X слабкої множини $\tilde{\tilde{B}}$ в X логічно означити у вигляді

$$\tilde{\tilde{A}} \supset \tilde{\tilde{B}} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in X(\ \nu_A(x) > \nu_B(x)\ ). \tag{2.32}$$

Враховуючи (2.19), отримаємо:

$$\tilde{\tilde{A}} \supset \tilde{\tilde{B}} \Leftrightarrow \forall x \in X(\ (\alpha_A(x), \omega_A(x)\ ) > (\alpha_B(x), \omega_B(x)\ )\ ) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in X(\alpha_A(x) > \alpha_B(x)\ \wedge \omega_A(x) = \omega_B(x)) \vee (\omega_A(x) > \omega_B(x)). \tag{2.33}$$

Слабку множину $\tilde{\tilde{B}}$ таку, що $\tilde{\tilde{B}} \subseteq \tilde{\tilde{A}}$ будемо називати *підмножиною слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$.

Як і у випадку звичайних множин, якщо $\tilde{\tilde{B}} \subseteq \tilde{\tilde{A}}$ і $\tilde{\tilde{B}} \neq \tilde{\tilde{A}}$, то будемо називати слабку множину $\tilde{\tilde{B}}$ *власною підмножиною* слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ і використовувати для відображення цього факту співвідношення строгого включення $\tilde{\tilde{B}} \subset \tilde{\tilde{A}}$.

Якщо $\tilde{\tilde{B}} \subseteq \tilde{\tilde{A}}$ і $\tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{A}}$, або $\tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{\varnothing}}$, то слабку множину $\tilde{\tilde{B}}$ будемо називати *невласною підмножиною* слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$.

Очевидно, що будь-яка підмножина слабкої множини є слабкою множиною.

Звернемо увагу на те, що введені відношення рівності, нерівності, строгого та нестрогого включення між слабкими множинами ми не позначили зверху значком подвійної тильди та не назвали слабкими, резервуючи значок подвійної тильди та термін «слабкий» для математичних об'єктів, які характеризуються відповідними функціями напрямлених рівнів належності (тобто є слабкими по суті). Що стосується введених бінарних відношень на множині $\wp(\tilde{\tilde{X}})$ всіх слабких підмножин універсума X, то вони є звичайними бінарними відношеннями між елементами цієї множини, оскільки самі по собі не пов'язані ні з якими функціями напрямлених рівнів належності і підпадають під звичайне означення бінарних відношень (дивись, наприклад [112, 127]). Тобто це є звичайні відношення між слабкими множинами.

Незважаючи на те, що позначення введених звичайних бінарних відношень між слабкими множинами збігаються з позначеннями відповідних бінарних відношень між нечіткими та звичайними множинами, неоднозначність сприйняття співвідношень зі слабкими множинами виключається за умови, що для позначення слабких множин ми будемо вживати в усіх неочевидних випадках позначку слабкості – подвійну тильду в тексті запису відповідних співвідношень. Аналогічні правила щодо позначень та термінології було б доцільно використовувати і в теорії нечітких множин. Але, на жаль, це не так. В наукових роботах з теорії нечітких множин досить часто зустрічаються випадки вживання позначки нечіткості – одинарної тильди та терміну «нечіткий» до математичних об'єктів, які не характеризуються ніякими функціями належності, тобто не є нечіткими по своїй суті. Наприклад, в

[126] вживається позначка нечіткості – одинарна тильда для позначення звичайних бінарних відношень між нечіткими множинами, а також використовуються терміни «нечіткий групоїд», «нечіткий моноїд» та інші замість «звичайний групоїд (моноїд) на звичайній множині нечітких підмножин» універсума. В роботах [128–130] вживаються терміни «нечітка база знань» та «нечітка модель прогнозування» замість «база нечітких знань» та «модель нечіткого прогнозування». На кінець, в [131] та деяких інших роботах вживається навіть термін «нечітка математика» замість «математика нечіткості».

На думку авторів, таке вживання термінів та позначень є нераціональним і в кінцевому результаті може призвести до неоднозначності та плутанини. Особливо недоцільно використовувати таку термінологію та позначення в математичних роботах, оскільки математика традиційно славиться строгістю та однозначністю своєї мови та понять, які в ній вводяться та використовуються.

З метою уникнення такої неоднозначності в цій роботі ми будемо вживати верхні позначки слабкості та нечіткості, а також терміни «слабкий» та «нечіткий» тільки у випадку, коли відповідний математичний об'єкт буде характеризуватися функцією напрямлених рівнів належності (для слабких об'єктів) або функцією належності (для нечітких об'єктів).

Розглянемо основні властивості введених бінарних відношень слабких множин і покажемо, що вони відповідають властивостям аналогічних відношень звичайних та нечітких множин.

Наступна теорема задає основні властивості відношення рівності слабких множин.

Теорема 2.3. Відношення рівності слабких множин є рефлексивним, симетричним та транзитивним, тобто

$$\forall \overset{\approx}{A} \in \wp(\overset{\approx}{X})\,(\overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{A}),\ \forall \overset{\approx}{A}, \overset{\approx}{B} \in \wp(\overset{\approx}{X})\,(\overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{B} \Rightarrow \overset{\approx}{B} = \overset{\approx}{A}) \text{ і}$$

$$\forall \overset{\approx}{A}, \overset{\approx}{B}, \overset{\approx}{C} \in \wp(\overset{\approx}{X})\,(\overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{B} \wedge \overset{\approx}{B} = \overset{\approx}{C} \Rightarrow \overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{C}).$$

Доведення. Згідно з означенням рівності (2.27)

$$\overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{B} \equiv \forall x \in X(\nu_A(x)\ E_{\alpha\omega}\ \nu_B(x)).$$

Відношення $E_{\alpha\omega}$ є діагональним відношенням на $M_{\alpha\omega}$, а будь-яке діагональне відношення є окремим випадком відношення еквівалентності [112]. Але довільне відношення еквівалентності є рефлексивним, симетричним та транзитивним [112].♦

Сформулюємо теореми про основні властивості відношень строгого та нестрогого включень слабких множин.

Теорема 2.4. Нестроге відношення включення слабких множин є транзитивним, рефлексивним та антисиметричним, тобто

$$\forall \overset{\approx}{A}, \overset{\approx}{B}, \overset{\approx}{C} \in M_{\alpha\omega}^{X} (\overset{\approx}{A} \supseteq \overset{\approx}{B} \wedge \overset{\approx}{B} \supseteq \overset{\approx}{C} \Rightarrow \overset{\approx}{A} \supseteq \overset{\approx}{C}),$$

$$\forall \overset{\approx}{A} \in M_{\alpha\omega}^{X} (\overset{\approx}{A} \supseteq \overset{\approx}{A}),$$

$$\forall \overset{\approx}{A},\ \overset{\approx}{B} \in M_{\alpha\omega}^{X} (\overset{\approx}{A} \supseteq \overset{\approx}{B} \wedge \overset{\approx}{B} \supseteq \overset{\approx}{A} \Rightarrow \overset{\approx}{A} = \overset{\approx}{B}).$$

Доведення. Оскільки $S_{\alpha\omega}$ згідно з означенням є строгим лінійним порядком на $M_{\alpha\omega}$, а $E_{\alpha\omega}$ – діагональне відношення на $M_{\alpha\omega}$ і

$$D_{\alpha\omega} = S_{\alpha\omega} \cup E_{\alpha\omega},$$

то $D_{\alpha\omega}$ є нестрогим лінійним порядком на $M_{\alpha\omega}$ [112]. Тому порядок $D_{\alpha\omega}$, як і будь-який нестрогий лінійний порядок, є транзитивним, рефлексивним та антисиметричним.

Згідно з означенням нестрогого включення слабких множин (2.30)

$$\overset{\approx}{A} \supseteq \overset{\approx}{B} \equiv \forall x \in X (\nu_A(x)\, D_{\alpha\omega}\, \nu_B(x)).$$

Тому висновки теореми безпосередньо випливають із транзитивності, рефлексивності та антисиметричності нестрогого порядку $D_{\alpha\omega}$, що і потрібно було довести.♦

Із висновків теореми 2.4 випливає, що відношення нестрогого включення задає в $\wp(\overset{\approx}{\mathbf{1}}^{+})$ часткову упорядкованість слабких множин, як це має місце для звичайних та нечітких множин.

Теорема 2.5. Строге відношення включення слабких множин транзитивне, антирефлексивне та асиметричне, тобто

$$\forall \overset{\approx}{A}, \overset{\approx}{B}, \overset{\approx}{C} \in \wp(\overset{\approx}{X})\,(\overset{\approx}{A} \supset \overset{\approx}{B} \wedge \overset{\approx}{B} \supset \overset{\approx}{C} \Rightarrow \overset{\approx}{A} \supset \overset{\approx}{C}),$$

$$\forall \overset{\approx}{A} \in \wp(\overset{\approx}{X})\,(\overset{\approx}{A} \not\subset \overset{\approx}{A}),$$
$$\forall \overset{\approx}{A}, \overset{\approx}{B} \in \wp(\overset{\approx}{X})\,(\overset{\approx}{A} \supset \overset{\approx}{B} \Rightarrow \overset{\approx}{A} \not\subset \overset{\approx}{B}).$$

Доведення. Згідно з означенням строгого слабкого включення (2.32)

$$\overset{\approx}{A} \supset \overset{\approx}{B} \equiv \forall x \in X\,(\, \nu_A(x)\; S_{\alpha\omega}\; \nu_B(x)\,).$$

Оскільки $S_{\alpha\omega}$ згідно з означенням є строгим лінійним порядком на множині направлених рівнів належності, то висновки теореми безпосередньо випливають із властивостей транзитивності, антирефлексивності та асиметричності відношень строгих порядків [112].♦

Наведені вище теореми показують, що відношення рівності та включення слабких множин, незважаючи на особливості введених на просторі напрямлених рівнів належності відношень порядку, мають такі ж основні властивості, що й відношення рівності та включення звичайних та нечітких множин.

Введемо поняття *множини всіх підмножин* $\wp(\overset{\approx}{A})$ *слабкої множини* $\overset{\approx}{A}$ в X:

$$\wp(\overset{\approx}{A}) \overset{df}{=} \{\overset{\approx}{A}_n \in \wp(\overset{\approx}{X}) \mid \overset{\approx}{A}_n \subseteq \overset{\approx}{A}\}, \tag{2.34}$$

де n пробігає множину індексів I таку, що $\operatorname{card} I = \operatorname{card} \wp(\overset{\approx}{X})$.

Згідно з (2.34) сімейство слабких множин $\wp(\overset{\approx}{A})$ є *множиною всіх слабких підмножин слабкої множини* $\overset{\approx}{A}$ тоді та тільки тоді, коли кожен елемент цього сімейства є підмножиною слабкої множини $\overset{\approx}{A}$.

Враховуючи (2.30) та (2.22), отримаємо:

$$\wp(\overset{\approx}{A}) = \{\overset{\approx}{A}_n \in \wp(\overset{\approx}{X}) \mid \forall x \in X\,(\, \nu_{A_n}(x) \le \nu_A(x)\,)\} =$$

$$= \{\overset{\approx}{A}_n \mid \forall x \in X((\alpha_{A_n}(x) \le \alpha_A(x) \wedge \omega_{A_n}(x) = \omega_A(x)) \vee (\omega_{A_n}(x) < \omega_A(x)))\}.$$

На завершення розділу доведемо теорему про включення будь-якої слабкої множини в універсумі X в повну слабку множину в цьому універсумі.

Теорема 2.6. Будь-яка слабка множина в універсумі X є підмножиною повної слабкої множини в цьому універсумі.

Доведення. Припустимо, що існує така слабка множина $\tilde{\tilde{A}}$ в X, що $\tilde{\tilde{X}} \not\supseteq \tilde{\tilde{A}}$. Тоді згідно з означенням включення слабких множин (2.30) $\exists x_0 \in X\,(\ \nu_X(x_0) < \nu_A(x_0)\ )$. Оскільки згідно з (2.26)

$$\forall x \in X\,(\nu_X(x) = \max M_{\alpha\omega}),$$

то ми приходимо до суперечності, оскільки ні один напрямлений рівень належності не може бути більшим за максимальний елемент множини $M_{\alpha\omega}$. Це означає, що зроблене припущення хибне, а значить твердження теореми виконується.♦

Доведена теорема дає необхідні і достатні підстави замість вербальних тверджень «для всіх слабких множин $\tilde{\tilde{A}}$ в X» або «будь-яка слабка множина $\tilde{\tilde{A}}$ в X» вживати символьний запис $\forall \tilde{\tilde{A}} \subseteq \tilde{\tilde{X}}$, який ми і будемо використовувати надалі.

РОЗДІЛ 3
ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СЛАБКИХ МНОЖИН

Відомо, що нечіткі множини в X мають геометричне зображення у вигляді графіка функції належності для випадку, коли $X \subseteq \mathrm{R}$, або $X \subseteq \mathrm{R}^2$, де R – множина дійсних чисел. Було б зручно за цих же умов мати геометричну інтерпретацію слабких множин.

Оскільки слабка множина повністю задається своєю функцією рівнів, то її геометричне зображення повинно бути пов’язано із графіком цієї функції. Однак область прибуття функції рівнів $M_{\alpha\omega}$ не є ні множиною дійсних чисел R, ні будь-якою її підмножиною, навіть за умови, що $M_\alpha \subset \mathrm{R}$. Дійсно, $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega = M_\alpha \times \{+, -\} \setminus \{1^-\}$. Навіть у випадку $M_\alpha = [0;\ 1]$, який розглядається в цій роботі детально, будемо мати $M_{\alpha\omega} = [0;\ 1] \times \{+, -\} \setminus \{1^-\}$. Для цього випадку за умови, що $X \subseteq \mathrm{R}$, можна було б задавати позитивно напрямлені рівні належності додатними значеннями осі ординат, а негативно напрямлені – від’ємними значеннями цієї осі. Але для більш загального виду множини ненапрямлених рівнів належності $M_\alpha \subseteq \mathrm{R}$, коли до її складу увійдуть не тільки додатні, але й від’ємні числові значення, цей спосіб геометричного зображення слабких множин стане неприйнятним. Крім того упорядкованість чисел на числовій прямій, як ми бачили вище, збігається із упорядкованістю тільки позитивно напрямлених рівнів належності і не збігається із упорядкованістю негативно напрямлених. Тому для геометричного зображення функції рівнів слабкої множини в цій роботі пропонується використовувати два інших більш універсальних способи.

На осі абсцис ми завжди будемо відкладати числові елементи універсума $X \subseteq \mathrm{R}$ згідно з їх природною упорядкованістю, а в ролі осі ординат в першому із випадків використовувати ненапрямлену вісь, яка буде утримувати значення ненапрямлених рівнів належності $\alpha(x)$, $x \in X$, упорядковані згідно зі строгим лінійним порядком S_α на M_α, а в другому – вісь напрямлених рівнів належності, на якій будуть відкладатись значення напрямлених рівнів належності $\nu(x)$, упорядковані згідно зі строгим лінійним порядком $S_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$.

3.1 Геометричне зображення слабких множини в звичайних декартових осях координат

Розглянемо перший спосіб геометричного зображення слабких множин більш детально.

Враховуючи, що кожен елемент універсума може мати тільки дві напрямленості свого рівня належності слабкій множині, а перша координата α напрямленого рівня належності (α, ω) може приймати значення тільки із відрізка [0; 1] незалежно від своєї напрямленості ω, будемо використовувати вісь ненапрямлених рівнів належності одночасно для зображення як позитивно, так і негативно напрямлених рівнів належності, зображаючи графік функції $\alpha(x)$ залежно від значення напрямленості $\omega(x)$ по різному.

Розглянемо правила першого способу геометричного зображення слабких множин для двох випадків, коли універсум X має потужність континуума, та коли ця множина є дискретною. В обох випадках для геометричного зображення слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X будемо використовувати графік її функції ненапрямлених рівнів належності α_A, використовуючи вісь абсцис для відображення елементів універсума, а вісь ординат – для значень ненапрямлених рівнів належності.

У випадку дискретності універсума X точки графіка, які відповідають елементам універсума з позитивною напрямленістю рівнів належності, будемо позначати крапкою, а точки, які відповідають елементам з негативною напрямленістю рівнів належності, – тире.

На рис. 3.1 у відповідності до цих правил наведено приклад скінченої слабкої множини $0 \mid 0{,}6^{-} + 1 \mid 0{,}6^{-} + 2 \mid 0{,}6^{-} + 3 \mid 0{,}4^{+} + 4 \mid 0{,}4^{+} +$ $+\, 5 \mid 0{,}2^{+} + 6 \mid 0{,}2^{+} + 7 \mid 0{,}2^{+} + 8 \mid 0{,}6^{-} + 9 \mid 0{,}6^{-} + 10 \mid 0{,}6^{-}$ в $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

У випадку континуального універсума X ту частину графіка, яка відповідає елементам універсума з позитивною напрямленістю рівнів належності, будемо зображати суцільною лінією, а ту, яка відповідає елементам з негативною напрямленістю, – пунктирною. В точці переходу графіка із одного класу напрямленостей слабкої множини в інший будемо зображати стрілку, напрямлену в сторону відкритої границі класу.

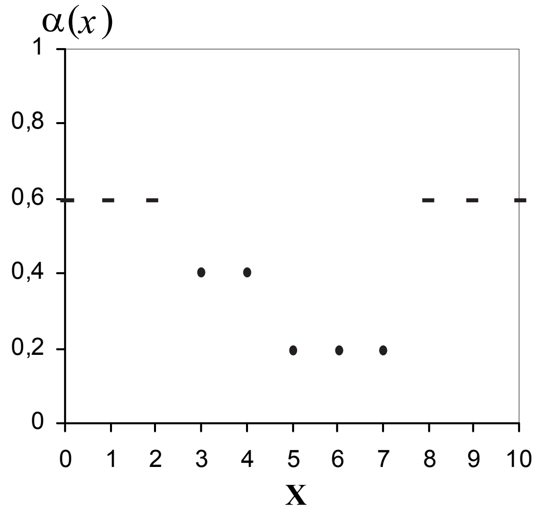


Рисунок 3.1 – Приклад геометричного зображення дискретної слабкої множини в ненапрямлених осях координат

На рис. 3.2 згідно з цими правилами наведено приклад геометричного зображення континуальної слабкої множини

$$\int_{x\in[0;4)} x\,|\,\alpha(x)^{-} + \int_{x\in[4;6]} x\,|\,\alpha(x)^{+} + \int_{x\in(6;10]} x\,|\,\alpha(x)^{-}$$

за умови, що $X = [0;\ 10]$. Надалі у випадку такого геометричного тлумачення слабкої множини будемо говорити, що слабка множина зображена в ненапрямлених або звичайних осях координат.

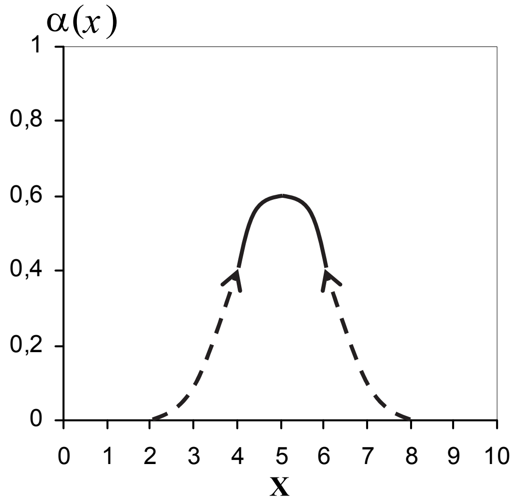


Рисунок 3.2 – Приклад геометричного зображення континуальної слабкої множини в ненапрямлених осях координат

3.2 Геометричне зображення слабких множин в напрямлених осях координат

Тепер перейдемо до другого можливого способу геометричної інтерпретації слабких множин, згідно з яким в координатній системі для зображення графіка функції напрямлених рівнів $\nu(x)$ у ролі осі ординат буде використовуватись вісь напрямлених рівнів належності. По відношенню до такого способу геометричної інтерпретації слабких множин будемо говорити, що слабка множина зображена в *напрямлених осях координат*.

Для того, щоб підкреслити особливості негативно напрямлених рівнів належності та зберегти однотипність геометричного зображення слабких множин в напрямлених та звичайних осях координат, будемо зображати графік функції $\nu(x)$ в напрямлених осях координат для негативно напрямлених рівнів належності $\omega(x)$ за тими ж правилами, які ми обумовили для функції $\alpha(x)$ в звичайних декартових осях.

На рис. 3.3 в напрямлених осях координат показана дискретна слабка множина, яка на рис. 3.1 зображена в звичайних декартових осях.

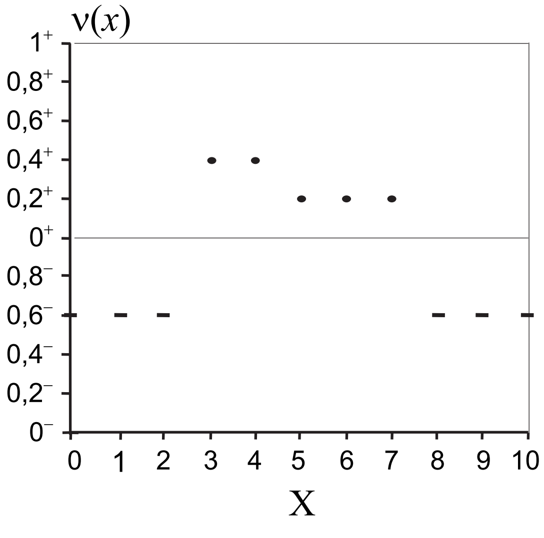


Рисунок 3.3 – Приклад геометричного зображення дискретної слабкої множини в напрямлених осях координат

Як бачимо із цього рисунка, всі негативно напрямлені рівні належності перемістились в нижню частину графіка слабкої множини, а позитивно напрямлені – в верхню, що відповідає розміщенню позитивно та негативно напрямлених рівнів належності на напрямленій осі ординат.

На рис. 3.4 в напрямлених осях координат зображена слабка множина, яка була показана в ненапрямлених осях на рис. 3.2.

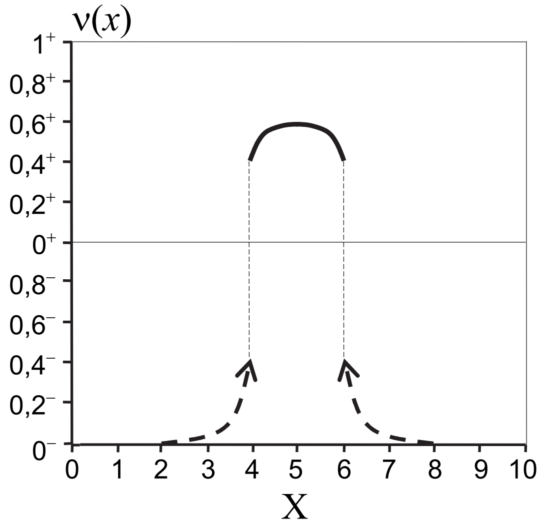


Рисунок 3.4 – Приклад геометричного зображення континуальної слабкої множини в напрямлених осях координат

Як бачимо із рис. 3.4, графік напрямлених рівнів належності слабкої множини $\int\limits_{x\in[0;4)} x|\alpha(x)^- + \int\limits_{x\in[4;6]} x|\alpha(x)^+ + \int\limits_{x\in(6;10]} x|\alpha(x)^-$ в напрямлених осях координат має розриви при $x = 4$ та $x = 6$, які для випадку дійсної функції дійсного аргументу ми б назвали розривами першого роду.

В той же час в ненапрямлених осях ця слабка множина виглядає неперервною. Це пояснюється тим, що в ненапрямлених осях вісь ординат є фактично віссю ненапрямлених рівнів належності, кожна точка якої може відповідати двом різним напрямленим рівням належності з одним і тим же значенням ненапрямленого рівня та протилежними значеннями напрямленості. Тому в цьому випадку ми фактично використовуємо замість графіка функції $\nu(x)$ графік функції $\alpha(x)$, і тільки спосіб зображення лінії графіку говорить про напрямленість відповідних рівнів належності. В той же час в напрямлених осях між множиною точок осі ординат та множиною напрямлених рівнів належності простору $M_{\alpha\omega}$ існує бієкція. Тому кожна точка осі ординат відповідає тільки одному напрямленому рівню належності і навпаки кожен окремий напрямлений рівень належності відповідає тільки одній точці осі ординат.

З допомогою рис. 3.5 ми можемо також пересвідчитись в тому, що геометричне зображення слабкої множини, яке виглядає неперервним в напрямлених осях, може мати розриви в ненапрямлених осях координат.

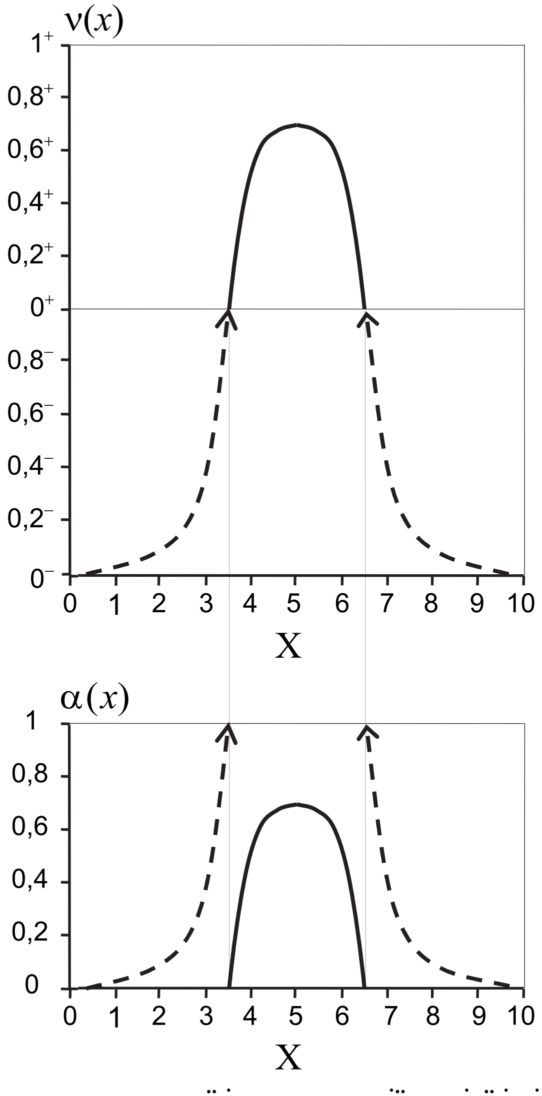


Рисунок 3.5 – Приклад геометричної інтерпретації однієї і тієї ж слабкої множини в напрямлених та звичайних осях координат

В окремих випадках зображення слабкої множини в напрямлених та ненапрямлених осях координат може виглядати однаково. Для цього, очевидно, достатньо, щоб елементи універсума знаходились по відношенню до слабкої множини тільки на негативних або тільки на позитивних рівнях належності. Рис. 3.6 зокрема показує, що геометричні інтерпретації пустої та повної слабких множин виглядають однаково як в напрямлених, так і в декартових осях координат.

Надалі будемо використовувати обидва запропоновані вище способи геометричного зображення слабких множин, вибираючи більш доцільний залежно від умов задачі, яка буде розв'язуватись, або той, в якому це зображення буде сприйматись простіше.

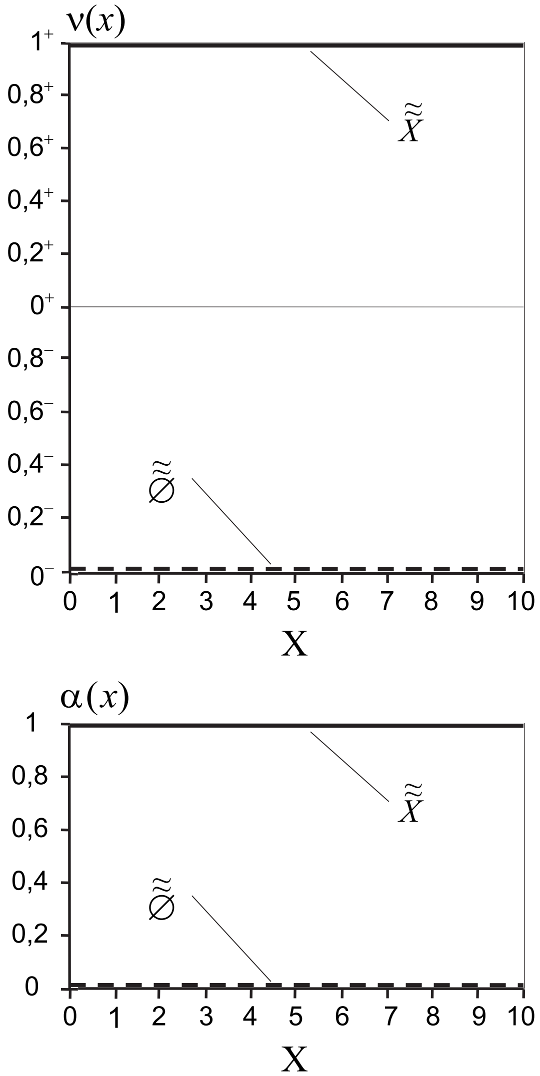


Рисунок 3.6 – Геометричні інтерпретації пустої та повної слабких множин в напрямлених та звичайних осях координат

Вибір виду осей може залежати зокрема від того, як в них виглядатиме геометричне зображення слабкої множини: розривним чи неперервним. Крім того, якщо виникне необхідність в одних осях разом із слабкими множинами зображати також нечіткі множини, то це доцільніше робити в ненапрямлених осях, в яких останні будуть мати звичайне зображення.

Зауважимо також, що обидва запропоновані способи геометричного зображення слабких множин можна, очевидно, використовувати у випадку, коли $X \subseteq \mathrm{R}^2$. При цьому для зображення елементів універсума повинні використовуватись дві звичайні осі координат, а у ролі третьої осі залежно від вибраного способу геометричного зображення необхідно використати відповідно ненапрямлену або напрямлену вісь координат.

3.3 Геометрична інтерпретація відношень включення слабких множин

Наведемо декілька прикладів геометричної інтерпретації відношення включення слабких множин в декартових та напрямлених осях координат та порівняємо їх між собою.

На рис. 3.7 в декартових осях координат наведені дві слабкі множини $\tilde{\tilde{A}}$ та $\tilde{\tilde{B}}$ в універсумі $X = [0;\ 10]$. Причому слабка множина $\tilde{\tilde{B}}$ є власною підмножиною слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, тобто $\tilde{\tilde{B}} \subset \tilde{\tilde{A}}$.

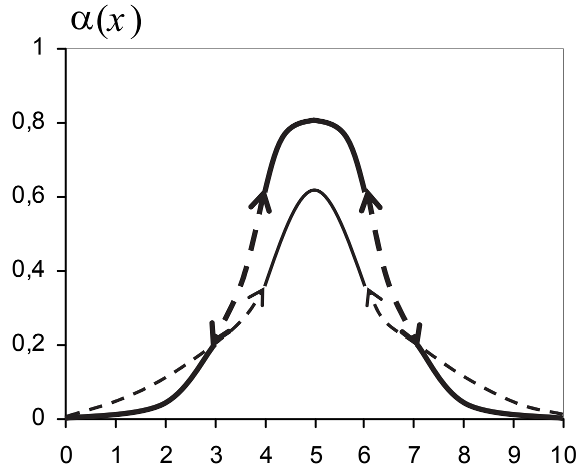


Рисунок 3.7 – Графічна інтерпретація відношення включення слабких множин в звичайних декартових осях координат

Із наведеного рисунка видно, що в звичайних (ненапрямлених) осях координат графічне зображення включення слабких множин має такі особливості, яких немає у відповідного відношення нечітких множин.

Дійсно, якщо для нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ має місце співвідношення $\tilde{B} \subset \tilde{A}$, то виконується умова

$$\forall x \in X(\mu_B(\mathrm{x}) \le \mu_A(\mathrm{x})) \ \wedge \ \exists x((\mu_B(\mathrm{x}) < \mu_A(\mathrm{x})).$$

Це означає, що ні одна точка графіка функції належності нечіткої множини $\tilde{B}$ не може лежати вище відповідної точки графіка функції належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

Однак із рис. 3.7 наочно видно, що аналогічна умова для функцій ненапрямлених рівнів належності слабких множин $\tilde{\tilde{A}}$ та $\tilde{\tilde{B}}$ не виконується. В усіх точках інтервалів (0; 3) та (7; 10) ця умова порушується.

В той же час графічна інтерпретація того ж самого відношення включення слабких множин в напрямлених осях (рис. 3.8) виглядає подібно до графічного зображення аналогічного відношення нечітких множин – ні одна точка графіка функції належності слабкої множини $\tilde{\tilde{B}}$ не лежить вище відповідної точки графіка функції належності слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$.

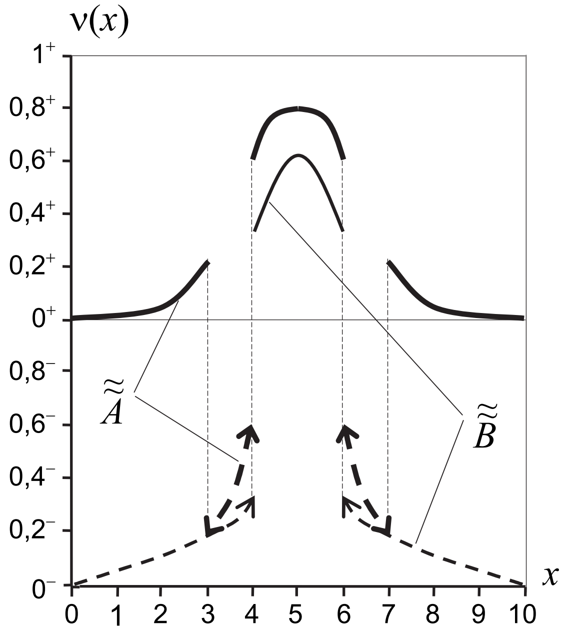


Рисунок 3.8 – Графічна інтерпретація відношення включення слабких множин в напрямлених осях координат

Порівнюючи наведені рисунки, бачимо, що зображення слабких множин на рис. 3.7 є більш простим та легше сприймається, ніж зображення цих же слабких множин на рис. 3.8. Однак така ситуація буде мати місце не завжди. Частіше слабкі множини в напрямлених осях координат будуть виглядати простіше. Пояснення цьому факту буде зроблено в наступному розділі після введення понять неперервної та розривної слабкої множини.

На підтвердження сказаного розглянемо слабкі множини, зображені на рис. 3.9. На цьому рисунку зображені слабкі множини $\tilde{\tilde{A}}$ та $\tilde{\tilde{B}}$ в напрямлених та декартових осях координат. Для цих множин виконується співвідношення строгого включення $\tilde{\tilde{B}} \subset \tilde{\tilde{A}}$.

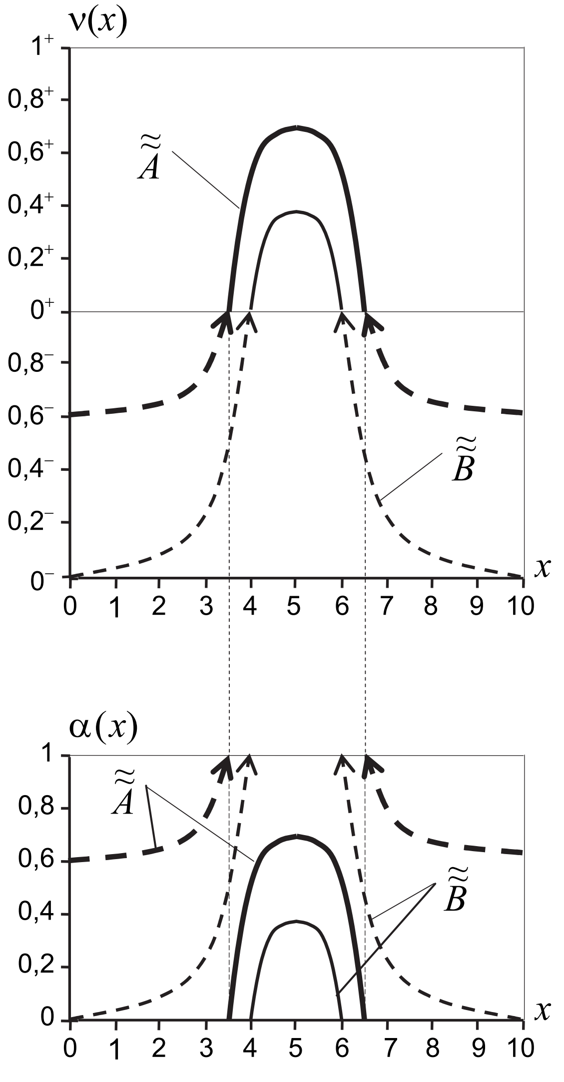


Рисунок 3.9 – Графічна інтерпретація відношення включення слабких множин в напрямлених та декартових осях координат

Із графіків функцій рівнів належності в напрямлених осях координат легко бачити, що виконується співвідношення $\tilde{\tilde{B}} \subset \tilde{\tilde{A}}$. Дійсно, всі точки графіка напрямлених рівнів належності слабкої множини $\tilde{\tilde{B}}$ лежать нижче відповідних точок графіка функції напрямлених рівнів слабкої множини $\approx\!\!\!A$. В напрямлених осях координат це рівносильно тому, що виконується умова

$$\forall x \in [0;\, 10](\nu_B(x) < \nu_A(x)),$$

із якої згідно з (2.32) випливає, що тим самим виконується співвідношення $\overset{\approx}{B} \subset \overset{\approx}{A}$.

Із графіків ненапрямлених рівнів належності, зображених на рис. 3.9 в декартових осях координат, теж можна зрозуміти, що виконується співвідношення $\overset{\approx}{B} \subset \overset{\approx}{A}$. Однак для цього необхідно прийняти до уваги напрямленість рівнів належності, яка на графіку функції $\alpha(x)$ в декартових осях координат зображується по різному у відповідності до прийнятих нами вище домовленостей: для позитивно напрямлених рівнів – суцільною лінією, а для негативно напрямлених – пунктирною. Слід також взяти до уваги, що будь-який позитивно напрямлений рівень належності згідно з (2.19), (2.22) більший за будь-який негативно напрямлений.

Розглядаючи в цьому розділі графіки слабких множин ми фактично використовували поняття неперервності та розривності функції рівнів належності на інтуїтивному рівні. Строго ці поняття будуть означені в наступному розділі після введення метрики в просторі напрямлених рівнів належності.

РОЗДІЛ 4
МЕТРИКА В ПРОСТОРІ НАПРЯМЛЕНИХ РІВНІВ НАЛЕЖНОСТІ

Відомо, що багато фундаментальних понять та результатів математичного аналізу пов’язано не з алгебраїчною природою дійсних чисел, а лише з поняттям відстані в просторі дійсних чисел, тобто з множиною дійсних чисел як метричним простором. До таких понять та фактів зокрема відносяться основні поняття та результати теорії границь, поняття неперервності та гладкості функцій та багато інших.

Для введення та використання аналогічних понять в теорії слабких множин і, зокрема, важливих для застосувань цієї теорії понять неперервних та розривних, спадних та зростаючих функцій рівнів слабкої множини виникає необхідність в означенні поняття відстані між точками простору напрямлених рівнів належності.

4.1 Визначення відстані між точками простору напрямлених рівнів належності

Як видно із рис. 2.5, лінійний порядок в просторі $M_{\alpha\omega}$ з негативно та позитивно напрямленими рівнями належності суттєво відрізняється від звичного лінійного порядку на відрізку числової осі з від'ємними та додатними числами. Тому звичайна евклідова метрика числової прямої не придатна для визначення відстані між довільною парою точок на напрямленій осі рівнів належності.

З метою перетворити множину напрямлених рівнів належності в метричний простір введемо на її елементах метрику ρ_M. Отриманий метричний простір будемо позначати у вигляді двійки $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$, де ρ_M – метрика на $M_{\alpha\omega}$, тобто невід'ємна дійсна функція, яка для кожної пари елементів із $M_{\alpha\omega}$ задає відстань між ними. За відомої метрики ρ_M метричним простором будемо називати також саму множину $M_{\alpha\omega}$, на елементах якої задана метрика, як це звичайно прийнято [93, 119, 120].

В просторі ненапрямлених рівнів належності M_α будемо використовувати звичайну метрику множини дійсних чисел ρ_{R}:

$$\rho_{\mathrm{R}}\colon \mathrm{R}^2 \to \{0\}\cup\mathrm{R}_+,\ \ \rho_{\mathrm{R}}(a, b) = |\, a - b\,|,\ \forall a, b\in\mathrm{R}, \tag{4.1}$$

де R_+ – множина додатних дійсних чисел.

Надалі для об'єднання множин $\{0\}\cup\mathrm{R}_+$, в результаті якого отримуємо множину додатних дійсних чисел з нулем, будемо використовувати спеціальне позначення R_{+0}.

Для випадку $\mathrm{Dom}\,\rho_{\mathrm{R}} = M_\alpha = [0;\, 1]$, функція (4.1) буде мати вигляд

$$\rho_{\mathrm{R}}\colon [0;\, 1]^2 \to [0;\, 1],\ \ \rho_{\mathrm{R}}(a, b) = |\, a - b\,|,\ \forall a, b\in [0;\, 1].$$

Очевидно, що ввести метрику в просторі $M_{\alpha\omega}$ можна різними способами. Задамо метрику ρ_M на осі напрямлених рівнів належності так, щоб для будь-якої пари точок на напрямленій осі відстань між ними можна було виміряти з допомогою звичайної лінійки, а у випадку однонапрямлених рівнів належності вона збігалась із звичайною метрикою ρ_R дійсних чисел.

Останню умову можна записати у вигляді

$$\forall\alpha, \beta\in\mathrm{M}_\alpha (\, \rho_M(\alpha^+, \beta^+\,) = \rho_M(\alpha^-, \beta^-\,) = \rho_{\mathrm{R}}(\alpha, \beta)\,) = |\, \alpha - \beta\,|. \tag{4.2}$$

Для реалізації поставленої мети доведемо наступну теорему.

Теорема 4.1. Функція $\rho_M :\ M_{\alpha\omega}^2 \to \mathrm{R}_{+0}$ така, що

$$\forall\alpha, \beta\in M_\alpha\ \forall\omega, \psi\in M_\omega\, (\rho_M(\alpha^\omega\, ; \beta^\Psi\,) = |\alpha - \beta|\ \Leftrightarrow\ \omega\ =\ \psi); \tag{4.3}$$

$$\forall\alpha, \beta\in M_\alpha(\rho_M(\alpha^+; \beta^-) = |\alpha - \wedge M_\alpha\,| + |\beta - \vee M_\alpha\,|); \tag{4.4}$$

$$\forall\alpha, \beta\in M_\alpha(\rho_M(\alpha^-\, ; \beta^+) = |\alpha - \vee M_\alpha\,| + |\beta - \wedge M_\alpha\,|), \tag{4.5}$$

є метрика в просторі $M_{\alpha\omega}$, для якої виконується умова (4.2).

Доведення. Згідно з означенням метричного простору функція ρ_M буде метрикою тоді та тільки тоді, коли вона є невід'ємною дійсною функцією, яка задовольняє всі без виключення аксіоми метричних просторів [119–121]. Для випадку напрямлених рівнів належності останні можуть бути записані у вигляді:

$$\forall\alpha^\omega, \beta^\Psi\in M_{\alpha\omega}\, (\rho_M(\alpha^\omega, \beta^\Psi) = 0 \Leftrightarrow \alpha^\omega = \beta^\Psi\ ); \tag{4.6}$$

$$\forall\alpha^\omega, \beta^\Psi\in M_{\alpha\omega}\, (\rho_M(\alpha^\omega, \beta^\Psi) = \rho_M(\beta^\Psi, \alpha^\omega)\,); \tag{4.7}$$

$$\forall \alpha^{\omega}, \beta^{\psi}, \gamma^{\chi} \in M_{\alpha\omega} \, (\rho_M(\alpha^{\omega}, \gamma^{\chi}) \leq \rho_M(\alpha^{\omega}, \beta^{\psi}) + \rho_M(\beta^{\psi}, \gamma^{\chi})). \quad (4.8)$$

Звідси випливає, що для доведення теореми необхідно і достатньо показати, що функція ρ_M задовольняє умови (4.2) та (4.6)–(4.8).

Зразу відмітимо, що ρ_M є саме невід'ємною дійсною функцією, оскільки її значення згідно з (4.3)–(4.5) є абсолютною величиною дійсного числа або сумою абсолютних величин дійсних чисел. Крім того згідно з (4.3) на множині однонапрямлених рівнів належності значення функції ρ_M для будь-якої пари однонапрямлених рівнів належності ніяк не залежить від їх напрямленості і з урахуванням цього та умови (4.3) вона фактично задає метрику в просторі ненапрямлених рівнів належності M_{α}, яка збігається із звичайною метрикою дійсних чисел (4.1). Оскільки звичайна метрика ρ_R є повноцінною метрикою в множині дійсних чисел, то на множині ненапрямлених рівнів належності, яка є підмножиною множини дійсних чисел, функція ρ_M теж є метрикою, причому такою, яка у випадку однонапрямлених рівнів належності відповідає звичайній метриці дійсних чисел ρ_R. Звідси робимо висновок, що рівність (4.3) відповідає всім аксіомам метрики (4.6)–(4.8).

Покажемо далі, що рівності (4.4)–(4.5) теж відповідають аксіомам метрики (4.6)–(4.8). Спочатку покажемо, що ці рівності задовольняють аксіому (4.6).

Нехай умова (4.6) для цих рівностей не виконується. В такому випадку повинна існувати така пара напрямлених рівнів належності α^{ω}, β^{ψ}, що

$$\alpha^{\omega} = \beta^{\psi} \wedge \rho_M(\alpha^{\omega}, \beta^{\psi}) \neq 0, \quad (4.9)$$

або

$$\alpha^{\omega} \neq \beta^{\psi} \wedge \rho_M(\alpha^{\omega}, \beta^{\psi}) = 0. \quad (4.10)$$

Оскільки умови (4.4)–(4.5) стосуються тільки випадку, коли напрямленості рівнів належності протилежні, то вирази (4.9)–(4.10) для цього випадку можна переписати в такому розширеному вигляді:

$$\alpha^{\omega} = \beta^{\psi} \wedge \omega \neq \psi \wedge \rho_M(\alpha^{\omega}, \beta^{\psi}) \neq 0, \quad (4.11)$$

або

$$\alpha^{\omega} \neq \beta^{\psi} \ \wedge \ \omega \neq \psi \wedge \rho_M(\alpha^{\omega}, \beta^{\psi}) = 0. \tag{4.12}$$

Але випадок (4.11) неможливий тому, що згідно з відношенням рівності $E_{\alpha\omega}$ в просторі $M_{\alpha\omega}$ напрямлені рівні належностей з рівними ненапрямленими належностями та протилежними напрямленостями не можуть бути рівними.

Розглянемо випадок (4.12). Згідно з (4.4), (4.5) наступні еквіваленції повинні бути тотожно істинними:

$$\rho_M(\alpha^{+}; \beta^{-}) = 0 \ \Leftrightarrow \ |\alpha - \wedge M_{\alpha}| + |\beta - \vee M_{\alpha}| = 0; \tag{4.13}$$

$$\rho_M(\alpha^{-} \ ; \beta^{+}) = 0 \ \Leftrightarrow \ |\alpha - \vee M_{\alpha}| + |\beta - \wedge M_{\alpha}| = 0. \tag{4.14}$$

Але сума абсолютних величин двох будь-яких дійсних чисел дорівнює нулю тільки тоді, коли обидві абсолютні величини дорівнюють нулю. Тому твердження (4.13)–(4.14) можна подати в такому рівносильному вигляді:

$$\rho_M(\alpha^{+}; \beta^{-}) = 0 \ \Leftrightarrow \ |\alpha - \wedge M_{\alpha}| = 0 \ \wedge \ |\beta - \vee M_{\alpha}| = 0; \tag{4.15}$$

$$\rho_M(\alpha^{-}; \beta^{+}) = 0 \ \Leftrightarrow |\alpha - \vee M_{\alpha}| = 0 \ \wedge \ |\beta - \wedge M_{\alpha}| = 0. \tag{4.16}$$

Праві частини тверджень (4.15)–(4.16) можна переписати згідно з такими ланцюжками рівносильностей:

$$|\alpha - \wedge M_{\alpha}| = 0 \ \wedge \ |\beta - \vee M_{\alpha}| = 0 \ \equiv \ \alpha - \wedge M_{\alpha} = 0 \ \wedge \ \beta - \vee M_{\alpha} = 0 \ \equiv$$
$$\equiv \ \alpha = \wedge M_{\alpha} \ \wedge \ \beta = \vee M_{\alpha},$$

і відповідно

$$|\alpha - \vee M_{\alpha}| = 0 \ \wedge \ |\beta - \wedge M_{\alpha}| = 0 \ \equiv \ \alpha - \vee M_{\alpha} = 0 \ \wedge \ \beta - \wedge M_{\alpha} = 0 \ \equiv$$
$$\equiv \ \alpha = \vee M_{\alpha} \ \wedge \ \beta = \wedge M_{\alpha}.$$

Підставляючи замість правої частини еквіваленцій (4.15), (4.16) отримані кон'юнкції, будемо мати:

$$\rho_M(\alpha^{+}; \beta^{-}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha = \wedge M_{\alpha} \ \wedge \ \beta = \vee M_{\alpha};$$
$$\rho_M(\alpha^{-}; \beta^{+}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha = \vee M_{\alpha} \ \wedge \ \beta = \wedge M_{\alpha}.$$

Але для негативно напрямлених рівнів α^{-}, β^{-} рівності $\alpha = \vee M_{\alpha}$ та $\beta = \vee M_{\alpha}$ можуть мати місце тільки у випадку, коли

$$\alpha^{-} = \beta^{-} = (\vee M_{\alpha}\ ; \wedge M_{\omega}).$$

В той же час згідно з означенням простору напрямлених рівнів належності (2.1) напрямлений рівень $(\vee M_{\alpha};\ \wedge M_{\omega})$ в цьому просторі відсутній. Таким чином, припустивши, що аксіома (4.6) не виконується, ми прийшли до хибних наслідків. Це означає, що зроблене припущення хибне, а рівності (4.4)–(4.5) відповідають аксіомі (4.6).

Що стосується аксіоми (4.7), то відповідність рівностей (4.4), (4.5) цій аксіомі безпосередньо випливає із комутативності суми абсолютних величин дійсних чисел. Дійсно, із (4.4)–(4.5) випливає, що

$$\rho_M(\alpha^{+};\ \beta^{-}) = |\alpha - \wedge M_{\alpha}| + |\beta - \vee M_{\alpha}|;$$
$$\rho_M(\beta^{-};\ \alpha^{+}) = |\beta - \vee M_{\alpha}| + |\alpha - \wedge M_{\alpha}|;$$
$$\rho_M(\alpha^{-};\ \beta^{+}) = |\alpha - \vee M_{\alpha}| + |\beta - \wedge M_{\alpha}|;$$
$$\rho_M(\beta^{+};\ \alpha^{-}) = |\beta - \wedge M_{\alpha}| + |\alpha - \vee M_{\alpha}|.$$

Але, оскільки

$$|\alpha - \wedge M_{\alpha}| + |\beta - \vee M_{\alpha}| \ = \ |\beta - \vee M_{\alpha}| + |\alpha - \wedge M_{\alpha}| \ \text{ і}$$
$$|\alpha - \vee M_{\alpha}| + |\beta - \wedge M_{\alpha}| = |\alpha - \vee M_{\alpha}| + |\beta - \wedge M_{\alpha}|,$$

то $\rho_M(\alpha^{+};\ \beta^{-}) = \rho_M(\beta^{-};\ \alpha^{+})$ і $\rho_M(\alpha^{-};\ \beta^{+}) = \rho_M(\alpha^{-};\ \beta^{+})$. Тобто аксіома (4.7) виконується для рівностей (4.4), (4.5).

Залишається показати, що рівності (4.4), (4.5) задовольняють також і аксіому (4.8). Доведення виконаємо спочатку для рівності (4.4).

Оскільки рівність (4.4) задає відстань між двома по різному напрямленими рівнями належності, причому початковий рівень має позитивну напрямленість, а кінцевий – негативну, то для цього необхідно і достатньо виконати доведення для двох випадків можливих наборів трьох напрямлених рівнів належності, які відрізняються напрямленістю середнього рівня належності, а початкові та кінцеві рівні належності мають відповідно однакові напрямленості. Причому напрямленість початкового рівня належності позитивна, а кінцевого – негативна.

Введемо такі набори трьох напрямлених рівнів у вигляді: α^{+}, β^{+}, γ^{-} та α^{+}, β^{-}, γ^{-}. Розглянемо спочатку перший набір напрямлених рівнів належності. Згідно з (4.3) $\rho_M(\alpha^{+};\ \beta^{+}) = |\alpha - \beta|$, а згідно з (4.4)

$$\rho_M(\alpha^+;\ \gamma^-) = |\alpha - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha|; \tag{4.17}$$

$$\rho_M(\beta^+;\ \gamma^-) = |\beta - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha|.$$

Тоді

$$\rho_M(\alpha^+;\ \beta^+) + \rho_M(\beta^+;\ \gamma^-) = |\alpha - \beta| + |\beta - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha|. \tag{4.18}$$

Із (4.17) та (4.18) випливає, що нерівність

$$\rho_M(\alpha^+; \gamma^-) \le \rho_M(\alpha^+; \beta^+) + \rho_M(\beta^+; \gamma^-)$$

виконується тоді та тільки тоді, коли

$$|\alpha - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha| \le |\alpha - \beta| + |\beta - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha| \equiv$$

$$\equiv |\alpha - \wedge M_\alpha| \le |\alpha - \beta| + |\beta - \wedge M_\alpha|.$$

Переконаємось, що остання нерівність дійсно виконується. Із властивостей абсолютної величини дійсного числа [123, 124] випливає, що

$$|\alpha - \beta| + |\beta - \wedge M_\alpha| \ge |\alpha - \beta + \beta - \wedge M_\alpha| \equiv$$

$$\equiv |\alpha - \beta| + |\beta - \wedge M_\alpha| \ge |\alpha - \wedge M_\alpha|.$$

Таким чином за першого набору напрямлених рівнів належності рівність (4.4) задовольняє аксіому (4.8).

За другого набору рівнів належності та α^+, β^-, γ^- згідно з (4.4) отримаємо:

$$\rho_M(\alpha^+;\ \gamma^-) = |\alpha - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha|; \tag{4.19}$$

$$\rho_M(\alpha^+; \beta^-) = |\alpha - \wedge M_\alpha| + |\beta - \vee M_\alpha|.$$

Для цього ж випадку згідно з (4.3) будемо мати:

$$\rho_M(\beta^-; \gamma^-) = |\beta - \gamma| = |\gamma - \beta|.$$

Із останніх двох рівностей отримаємо:

$$\rho_M(\alpha^+; \beta^-) + \rho_M(\beta^-; \gamma^-) = |\alpha - \wedge M_\alpha| + |\beta - \vee M_\alpha| + |\gamma - \beta|. \tag{4.20}$$

Із (4.19), (4.20) випливає, що нерівність

$$\rho_M(\alpha^+;\ \gamma^-) \le \rho_M(\alpha^+; \beta^-) + \rho_M(\beta^-;\ \gamma^-)$$

виконується тільки, якщо виконується нерівність

$$|\alpha - \wedge M_\alpha| + |\gamma - \vee M_\alpha| \le |\alpha - \wedge M_\alpha| + |\beta - \vee M_\alpha| + |\gamma - \beta| \equiv$$
$$\equiv |\gamma - \vee M_\alpha| \le |\gamma - \beta| + |\beta - \vee M_\alpha|.$$

Але остання нерівність дійсно виконується. В цьому легко переконатись, враховуючи, що

$$|\gamma - \beta| + |\beta - \vee M_\alpha| \ge |\gamma - \beta + \beta - \vee M_\alpha| \equiv$$
$$\equiv |\gamma - \beta| + |\beta - \vee M_\alpha| \ge |\gamma - \vee M_\alpha|.$$

Таким чином, за всіх можливих наборів напрямлених рівнів належності рівність (4.4) задовольняє аксіому (4.8).

Для завершення доведення покажемо, що для рівності (4.5) має місце той самий висновок – вона теж задовольняє аксіому (4.8). Оскільки рівність (4.4) задовольняє всі аксіоми метрики, то вона задовольняє і окрему аксіому метрики (4.7). З урахуванням цієї аксіоми та комутативної властивості суми абсолютних величин дійсних чисел перепишемо її у такому рівносильному вигляді:

$$\rho_M(\beta^-; \alpha^+) = |\beta - \vee M_\alpha| + |\alpha - \wedge M_\alpha|.$$

Але отримана рівність з точністю до взаємозаміни символів напрямлених рівнів належності рівносильна рівності (4.5). Звідси робимо висновок, що рівність (4.5), як і рівність (4.4), задовольняє аксіому (4.8).

Тим самим доведено, що всі рівності (4.3)–(4.5) задовольняють аксіоми метрики (4.8)–(4.8), а це означає, що функція ρ_M є метрикою. Оскільки те, що метрика ρ_M на множині однонапрямлених рівнів належності еквівалентна метриці ρ_R на множині ненапрямлених рівнів належності теж було доведено, то в результаті теорему доведено.♦

Таким чином, згідно з доведеною теоремою функція ρ_M є метрикою в просторі $M_{\alpha\omega}$, яка задає відстань між довільною парою точок цього простору. Причому відстань між будь-якими рівнями належності з однаковою напрямленістю за метрикою ρ_M дорівнює відстані між відповідними ненапрямленими рівнями належності за звичайною евклідовою метрикою ρ_R, що гарантується умовою (4.3).

Однак для будь-якої пари рівнів належності з різною напрямленістю метрика ρ_M задає відстань згідно зі своїми специфічними законами (4.4)–(4.5). Незважаючи на те, що ці закони вже не відповідають звичайній евклідовій метриці ρ_{R}, відстань між будь-якою парою точок на напрямленій осі координат можна виміряти з допомогою звичайної лінійки. Продемонструємо цю властивість метрики ρ_M з допомогою рис. 4.1, на якому показана відстань між точками $0{,}3^-$ та $0{,}8^+$ напрямленої осі координат.

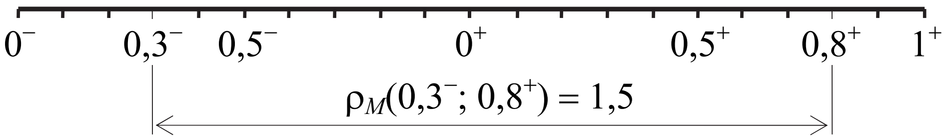


Рисунок 4.1 – Відстань між рівнями належності $0{,}3^-$ та $0{,}8^+$ на осі напрямлених рівнів належності

Така властивість метрики ρ_M вселяє впевненість, що при акуратному означенні неперервної (розривної) та спадної (зростаючої) функції напрямлених рівнів належності по аналогії до відповідних означень дійсної функції, але з використанням введеної на просторі напрямлених рівнів належності метрики, ми можемо сподіватись, що неперервні та розривні, а також спадні та зростаючі функції напрямлених рівнів будуть виглядати в напрямлених осях аналогічно відповідним дійсним функціям в звичайних декартових осях.

В наступному підрозділі вводяться саме такі неперервні та розривні, а також спадні та зростаючі функції напрямлених рівнів належності.

4.2 Неперервні та спадні функції напрямлених рівнів належності

Перед тим, як ввести означення неперервної та розривної, а також незростаючої, неспадної, зростаючої та спадної функції напрямлених рівнів належності, введемо поняття відкритого та замкненого шару метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$, а також ε-околу напрямленого рівня належності.

Відкритим шаром $O_M(\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon)$ метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M\rangle$ з центром в точці α_0^{ω} і радіусом ε будемо називати множину таких напрямлених рівнів належності $\alpha^{\omega} \in M_{\alpha\omega}$, для яких виконується співвідношення $\rho_M(\alpha^{\omega}, \alpha_0^{\omega_0}) < \varepsilon$, тобто

$$O_M(\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon) \overset{df}{=} \{\alpha^{\omega} \in M_{\alpha\omega} \mid \rho_M(\alpha^{\omega}, \alpha_0^{\omega_0}) < \varepsilon\}. \tag{4.21}$$

Замкненим шаром $O_M[\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon]$ метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M\rangle$ з центром в точці α_0^{ω} і радіусом ε будемо називати множину таких напрямлених рівнів належності $\alpha^{\omega} \in M_{\alpha\omega}$, для яких виконується нестроге співвідношення $\rho_M(\alpha^{\omega}, \alpha_0^{\omega_0}) \le \varepsilon$, тобто

$$O_M[\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon] \overset{df}{=} \{\alpha^{\omega} \in M_{\alpha\omega} \mid \rho_M(\alpha^{\omega}, \alpha_0^{\omega_0}) \le \varepsilon\}.$$

Аналогічно до того, як це прийнято в метричному просторі $\langle \mathrm{R}, \rho_{\mathrm{R}}\rangle$ для дійсних чисел, відкритий шар $O_M(\alpha^{\omega}, \varepsilon)$ будемо називати *ε-околом напрямленого рівня належності* α^{ω}. Із рис. 4.2 видно, що геометрична інтерпретація ε-околу на напрямленій осі координат виглядає точно так, як ε-окіл дійсного числа на звичайній числовій прямій.

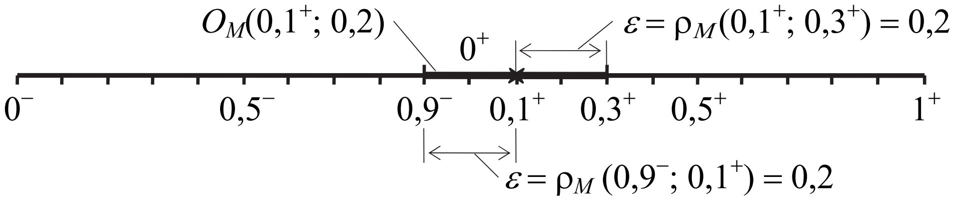


Рисунок 4.2 – Геометрична інтерпретація ε-околу на напрямленій осі координат

Введемо тепер поняття неперервної в точці $x \in X$ функції напрямлених рівнів належності $\nu(x)$, використовуючи введене вище поняття ε-околу напрямленого рівня належності та звичайне поняття δ-околу дійсного числа $x \in X$ [120, 122], яке будемо позначати $O_{\mathrm{R}}(x, \delta)$.

Функція напрямлених рівнів ν*:* $X \to M_{\alpha\omega}$ *є неперервною в точці* $x_0 \in X$ за означенням тільки тоді, коли для довільного ε-околу $O_M(\nu(x_0), \varepsilon)$ образу точки $x_0 \in X$ при відображенні ν існує такий δ-окіл

$O_R(x_0, \delta)$ точки $x_0 \in X$, що образ δ-околу $O_R(x_0, \delta)$ при відображенні ν є власною підмножиною ε-околу $O_M(\nu(x_0), \varepsilon)$, тобто

$$\forall O_M(\nu(x_0), \varepsilon) \subset M_{\alpha\omega}\ \exists O_R(x_0, \delta) \subset X\,(\ \nu(O_R(x_0, \delta)) \subset O_M(\nu(x_0), \varepsilon)). \quad (4.22)$$

Оскільки, згідно з (4.21)

$$O_M(\nu(x_0), \varepsilon) = \{\nu(x) \in M_{\alpha\omega} \mid \rho_M(\nu(x), \nu(x_0)) < \varepsilon\},$$

а звичайний δ-окіл дійсного числа x_0 $O_R(x_0, \delta) = \{x \in X \mid \rho_R(x, x_0) < \delta\}$ [120, 122], то, використовуючи замість множин $O_M(\nu(x_0), \varepsilon)$ та $O_R(x_0, \delta)$ їх визначальні властивості у вигляді нерівностей $\rho_M(\nu(x), \nu(x_0)) < \varepsilon$ та $\rho_R(x, x_0) < \delta$ відповідно, перепишемо (4.22) в такому рівносильному вигляді:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X\,(\ \rho_R(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_M(\nu(x), \nu(x_0)) < \varepsilon\ ). \quad (4.23)$$

Неважко бачити, що отримане рівносильне означення (4.23) неперервності функцій напрямлених рівнів належності в точці x_0 є аналогом добре відомого означення неперервності в заданій точці дійсних функцій виду f: R → R, яке належить Коші [118].

Як і у випадку звичайних дійсних функцій дійсного аргументу будемо вважати, що функція напрямлених рівнів належності розривна в точці $x_0 \in X$ за означенням, тільки якщо вона не задовольняє означення неперервності в точці $x_0 \in X$. Взявши заперечення від означень (4.22), (4.23), чисто формально отримаємо потрібні означення: функція напрямлених рівнів належності ν*:* $X \to M_{\alpha\omega}$ *розривна в точці* $x_0 \in X$ тоді і тільки тоді, коли

$$\exists O_M(\nu(x_0), \varepsilon) \subset M_{\alpha\omega}\ \forall O_R(x_0, \delta) \subset X\,(\ \nu(O_R(x_0, \delta)) \not\subset O_M(\nu(x_0), \varepsilon)\ )$$

або, що те саме,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X\,(\rho_R(x, x_0) < \delta \wedge \rho_M(\nu(x), \nu(x_0)) \geq \varepsilon)\ ).$$

Функцію напрямлених рівнів належності ν: $X \to M_{\alpha\omega}$ будемо називати *неперервною на множині* $D \subseteq X$ тільки тоді, коли вона неперервна в кожній точці цієї множини згідно з (4.22), (4.23).

На рис. 3.4 та рис. 3.5 показано, що розривна та неперервна на X функція напрямлених рівнів належності виглядає в напрямлених осях координат точно так, як відповідні дійсні функції одного дійсного аргументу. Але в звичайних осях координат всі неперервні функції напрямлених рівнів належності виглядають як розривні, а розривні можуть виглядати як неперервні.

Тепер введемо поняття зростаючої, неспадної, незростаючої та спадної функції напрямлених рівнів належності.

Функцію напрямлених рівнів належності $\nu\colon X \to M_{\alpha\omega}$ на множині $D \subseteq X$ за означенням будемо називати:
зростаючою тільки тоді, коли

$$\forall x_1\, x_2 \in D\ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \nu(x_1) < \nu(x_2)); \tag{4.24}$$

неспадною тільки за умови, що

$$\forall x_1\, x_2 \in D\ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \nu(x_1) \leq \nu(x_2)); \tag{4.25}$$

незростаючою тоді та тільки тоді, коли

$$\forall x_1\, x_2 \in D\ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \nu(x_1) \geq \nu(x_2)); \tag{4.26}$$

спадною тільки за умови, що

$$\forall x_1\, x_2 \in D\ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \nu(x_1) > \nu(x_2)). \tag{4.27}$$

Відмітимо, що у виразах (4.24)–(4.27) використовуються нерівності двох видів: у співвідношеннях для дійсних чисел x_1, x_2 – звичайні, які відповідають природному строгому лінійному порядку на множині дійсних чисел, а у співвідношеннях для напрямлених рівнів належності $\nu(x_1)$, $\nu(x_2)$ – спеціальні, які відповідають введеним в цій роботі спеціальним строгому $S_{\alpha\omega}$ та нестрогому $D_{\alpha\omega}$ досконалим порядкам (дивись підрозділ 2.1) на множині напрямлених рівнів належності.

Для їх практичного застосування можна використовувати формули (2.19)–(2.22), з допомогою яких вони виражені через звичайні відношення на множині ненапрямлених рівнів належності та відношення напрямленостей у просторі M_{ω}.

На рис. 4.3 наведено приклад спадної на відрізку [1; 5] функції напрямлених рівнів належності слабкої множини в напрямлених та звичайних декартових осях координат.

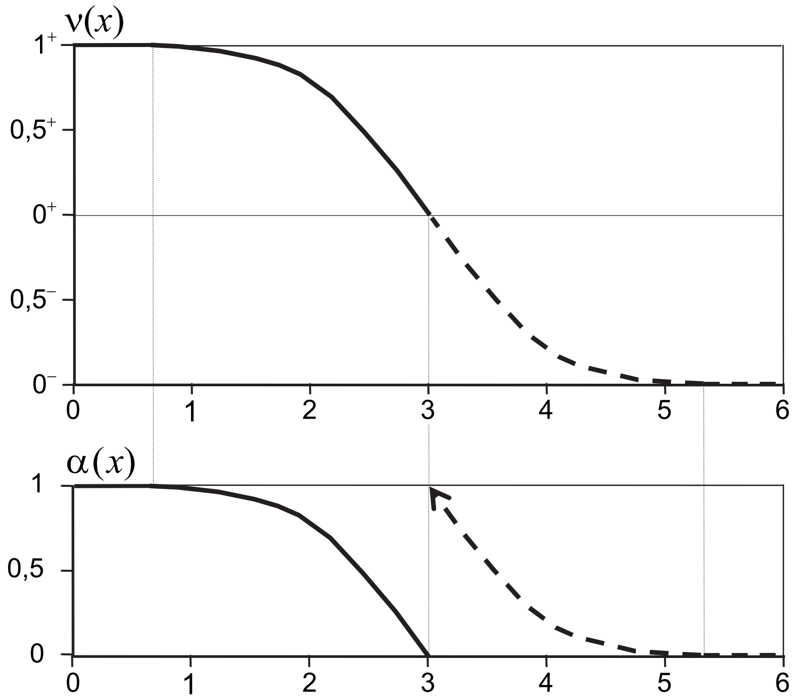


Рисунок 4.3 – Приклад спадної функції напрямлених рівнів належності в напрямлених та звичайних декартових осях

Із наведеного рисунку видно, що в напрямлених осях координат графік спадної функції рівнів слабкої множини виглядає природно, як і графік звичайної спадної скалярної функції в декартових осях координат. Однак в звичайних декартових осях координат графік функції напрямлених рівнів належності цієї ж слабкої множини не є спадним на відрізку [1; 5].

РОЗДІЛ 5
НЕЧІТКІ РЕАЛІЗАЦІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

Оскільки згідно з означенням слабкої множини ніякому елементу універсума не приписується ніякого ступеня належності цій множині, а тільки напрямлені рівні належності, на яких знаходяться елементи універсума по відношенню до цієї слабкої множини, то на семантичному рівні логічно вважати, що слабка множина в загальному випадку не може бути зведена до якоїсь звичайної або нечіткої множини.

В цьому легко переконатися і на формально математичному рівні. Формально нечітка множина є функцією $\mu\colon X \to M_\alpha$. Звичайна множина є окремим випадком нечіткої, таким, що областю прибуття характеристичної функції μ є двоелементна множина $\{ \min M_\alpha, \max M_\alpha\}$. Що стосується слабкої множини, то формально вона є функцією $\nu\colon X \to M_{\alpha\omega}$ з областю прибуття $M_{\alpha\omega} = M_\alpha \times M_\omega \setminus \{(\max M_\alpha; \min M_\omega)\}$. Оскільки функції μ та ν мають принципово різні області прибуття, то вони не можуть в загальному випадку формально зводитись одна до одної. Але оскільки введений нами математичний об’єкт названий множиною, нехай навіть і слабкою, то виникає необхідність якось аргументувати використання терміну «множина» в його назві.

Перш за все, як переконались автори, на множині всіх слабких підмножин універсума можна задати алгебру з операціями перетину, об'єднання та доповнення слабких множин, яка буде алгеброю Кліні [125], як це має місце і для звичайних та нечітких множин. Це, на думку авторів, повністю виправдовує використання терміну «множина» в назві слабких множин. Однак алгебра слабких множин, як вже було сказано у вступі, в цій роботі не розглядається. Цій темі автори планують присвятити окрему роботу.

По-друге, логічно припустити, що слабкі множини якось повинні бути пов’язані зі звичайними (канторовими) множинами та нечіткими множинами. Відкриття та усвідомлення такого зв'язку важливо як з теоретичної, так і з практичної точки зору. Зокрема це дасть можливість уяснити семантику інтерпретацій слабких множин в процесі моделювання з їх допомогою складних систем через відповідну семантику звичайних та нечітких множин.

В цьому розділі розглядається зв’язок слабких множин із чіткими та нечіткими множинами через введене далі поняття реалізації слабкої множини.

5.1 Поняття реалізації слабкої множини

Звичайною реалізацією слабої множини $\tilde{\tilde{A}}$ *в* X будемо називати звичайну множину $A \subseteq X$ за визначенням тоді і тільки тоді, коли

$$\forall x\in X\,(x\in A \Leftrightarrow \omega_A(x) = +). \tag{5.1}$$

Таким чином, згідно з (5.1) елемент універсума належить звичайній реалізації A слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ тільки за умови, якщо він має позитивно напрямлений рівень належності слабкій множині $\tilde{\tilde{A}}$. Враховуючи, що множина напрямленостей рівнів належності має тільки два елементи, із (5.1) отримаємо $\forall x\in X(x\notin A \Leftrightarrow \omega_A(x) = -)$.

Нечіткою реалізацією або просто реалізацією слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ *в* X будемо називати нечітку множину $\tilde{A}$ в X, функція належності якої $\mu_A : X \to M_\alpha$ задовольняє такі умови

$$\begin{gathered}(\omega_A(x) = + \;\Rightarrow\; \mu_A(x) \ge \alpha_A(x)) \;\wedge \\ \wedge\; (\omega_A(x) = - \;\Rightarrow\; \mu_A(x) \le \alpha_A(x)),\ \forall x\in X.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Покажемо, що із наведених означень звичайної та нечіткої реалізацій слабкої множини випливає істинність наступної теореми.

Теорема 5.1. Звичайна реалізація слабкої множини є окремим випадком нечіткої реалізації цієї слабкої множини, тобто для кожного елемента універсума імплікація

$$\begin{gathered}(x\in A \Leftrightarrow \omega_A(x) = +) \;\Rightarrow\; [(\omega_A(x) = + \;\Rightarrow\; \mu_A(x) \ge \alpha_A(x)) \;\wedge \\ \wedge\; (\omega_A(x) = - \;\Rightarrow\; \mu_A(x) \le \alpha_A(x))],\ \forall x\in X.\end{gathered} \tag{5.3}$$

є тотожно істинною.

Доведення. Для випадку звичайної множини A її характеристична функція має вигляд

$$\forall x\in X\,((x\in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1) \wedge (x\notin A \Rightarrow \chi_A(x) = 0)). \tag{5.4}$$

Оскільки кожен елемент універсума може мати тільки дві напрямленості рівнів належності, то згідно з (5.1) всі елементи $x \in X$ розбиваються на два класи, що не перетинаються. До першого класу належать ті елементи універсума, які належать звичайній реалізації A слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ і мають позитивну напрямленість рівня належності слабкій множині $\tilde{\tilde{A}}$, а до другого ті, які не належать множині A і мають негативну напрямленість рівнів належності по відношенню до слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Розглянемо ці два випадки окремо. Для всіх елементів $x \in X$, які належать множині A, будемо мати

$$\omega_A(x) = +, \ \ \chi_A(x) = \max M_\alpha = 1,$$

тому $\chi_A(x) \geq \alpha_A(x)$, що відповідає (5.3). Для всіх тих елементів $x \in X$, які не належать множині A, згідно з (5.2) $\omega_A(x) = -$, а згідно з (5.4) –

$$\chi_A(x) = \min M_\alpha = 0,$$

а тому $\chi_A(x) \leq \alpha_A(x)$, що знову відповідає (5.3).♦

Таким чином, ми переконались, що згідно з означеннями (5.1) та (5.2) звичайна реалізація слабкої множини є окремим випадком її нечіткої реалізації.

Враховуючи отриманий результат, всюди далі нечітку реалізацію будемо називати просто реалізацією слабкої множини. У випадку, коли реалізація слабкої множини буде звичайною множиною і це необхідно буде підкреслити, будемо вживати термін «звичайна реалізація слабкої множини».

Із означення реалізації (5.2) випливає, що ненапрямлений рівень належності $\alpha_A(x)$, який функція рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ приписує елементу універсума x, в залежності від напрямленості $\omega_A(x)$ можна розглядати як мінімально або максимально можливий ступінь належності цього елемента реалізаціям слабкої множини. При цьому позитивно напрямлені рівні належності задають мінімально можливі значення ступенів належності, а негативно напрямлені – їх максимально можливі значення. В загальному випадку позитивно напрямлений рівень належності $\alpha_A(x)^+$ задає нижню точну грань $\alpha_A(x)$ можливих значень належності елемента x нечітким реалізаціям слабкої множини $\overset{\approx}{A}$, а негативно напрямлений рівень належності $\alpha_A(x)^{-}$ – верхню точну грань $\alpha_A(x)$ таких можливих значень належності.

Це відповідає концепції слабкої множини, згідно з якою слабка множина не формує в універсумі ніяких звичайних або нечітких множин, а є більш загальною математичною структурою, яка для кожного елемента універсума задає тільки деякі граничні максимально або мінімально можливі значення ступенів належності ще не сформованій нечіткій множині.

Введене поняття реалізації слабкої множини дає досліднику ключ для можливих інтерпретацій напрямлених рівнів належності в процесі моделювання реальних фізичних, економічних, гуманістичних та інших складних систем з допомогою слабких множин як верхніх та нижніх точних граней допустимих значень параметрів та властивостей цих систем. Приклад такої інтерпретації для випадку моделювання невизначених параметрів електроенергетичної системи буде наведений в підрозділі 6.4.

5.2 Верхні та нижні реалізації слабких множин

Введемо поняття *множини всіх реалізацій слабкої множини* $\overset{\approx}{A}$ *в* X як множини, елементами якої є нечіткі множини в X, функції належності яких задовольняють умови (5.2). Множину всіх реалізацій слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в X позначимо $R(\overset{\approx}{A})$. Таким чином,

$$R(\overset{\approx}{A}) \overset{df}{=} \{\tilde{A} \subseteq X \mid (\omega_A(x) = + \;\Rightarrow\; \mu_A(x) \geq \alpha_A(x)) \;\wedge$$
$$\wedge\; (\omega_A(x) = - \;\Rightarrow\; \mu_A(x) \leq \alpha_A(x)),\ \forall x \in X\}. \tag{5.5}$$

Нечітку множину $\tilde{A}$, яка підпадає під означення реалізації слабкої множини $\overset{\approx}{A}$, будемо також називати нечіткою множиною, яка *не суперечить слабкій множині* $\overset{\approx}{A}$.

Введемо поняття верхньої та нижньої реалізацій слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в X.

Нечітка множина $\overline{A}$ в X є *верхньою реалізацією слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$ *в* X, якщо

$$\overline{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \wedge \forall \tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \ (\overline{A} \supseteq \tilde{A}), \qquad (5.6)$$

а нечітка множина $\underline{A}$ в X є *нижньою реалізацією слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$ *в* X, якщо

$$\underline{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \wedge \forall \tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \ (\underline{A} \subseteq \tilde{A}). \qquad (5.7)$$

У випадку, коли виникне необхідність підкреслити, що верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ є нечіткими множинами, будемо використовувати позначення $\overline{\tilde{A}}$ та $\underline{\tilde{A}}$ відповідно.

Із (5.6), (5.7) випливає, що верхня реалізація слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X є найбільшою нечіткою множиною, яка належить множині всіх нечітких реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, а нижня реалізація – є найменшою нечіткою множиною, яка належить системі нечітких множин $R(\tilde{\tilde{A}})$. Іншими словами, $\overline{\tilde{A}}$ та $\underline{\tilde{A}}$ є відповідно найбільшою та найменшою нечіткими множинами, які не суперечать слабкій множині $\tilde{\tilde{A}}$.

Для практичного використання слабких множин важливо знати, за яких умов існують верхня та нижня реалізації слабких множин та визначальні умови для цих реалізацій. Відповіді на ці запитання дає наступна теорема.

Теорема 5.2. Для будь-якої слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X існують верхня $\overline{A}$ та нижня $\underline{A}$ реалізації, функції належності яких задовольняють умови

$$\forall x \in X \, (\, (\omega_A(x) = + \ \Rightarrow \ \mu_{\overline{A}}(x) = 1) \wedge$$

$$\wedge \, (\, \omega_A(x) = - \ \Rightarrow \ \mu_{\overline{A}}(x) = \alpha_A(x)) \,); \qquad (5.8)$$

$$\forall x \in X \, (\, (\omega_A(x) = + \ \Rightarrow \ \mu_{\underline{A}}(x) = \alpha_A(x)) \wedge$$

$$\wedge \, (\omega_A(x) = - \ \Rightarrow \ \mu_{\underline{A}}(x) = 0) \,). \qquad (5.9)$$

Доведення. Спочатку виконаємо доведення твердження (5.8) для функції належності верхньої реалізації $\overline{A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$.

Враховуючи означення верхньої реалізації $\overline{A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ та нестрогого включення нечітких множин [80, 126], будемо мати:

$$\forall \tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}})\,(\overline{A} \supseteq \tilde{A}) \equiv \forall \tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \forall x \in X\,(\mu_{\overline{A}}(x) \geq \mu_A(x)). \tag{5.10}$$

За умови $\omega_A(x) = +$ із означення реалізації $\tilde{A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ випливає, що $\mu_A(x) \geq \alpha_A(x)$, а значить максимально можливе значення $\mu_A(x)$ дорівнює $\max M_\alpha = 1$. Тому згідно з (5.10) для будь-якої реалізації $\tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}})$ умова $\mu_{\overline{A}}(x) \geq \mu_A(x)$ може виконуватись, тільки якщо

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \max M_\alpha = 1,$$

що відповідає (5.8).

Для випадку $\omega_A(x) = -$ із означення реалізації слабкої множини випливає, що $\mu_A(x) \leq \alpha_A(x)$, а значить максимально можливе значення $\mu_A(x)$ дорівнює $\alpha_A(x)$. Тому згідно з (5.10) для будь-якої реалізації $\tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}})$ умова $\mu_{\overline{A}}(x) \geq \mu_A(x)$ може виконуватись, тільки якщо

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \alpha_A(x),$$

що і доводить справедливість твердження (5.8).

Тепер доведемо справедливість твердження (5.9).

Враховуючи означення нижньої реалізації $\underline{A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ та нестрогого включення нечітких множин, будемо мати:

$$\forall \tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}})\,(\underline{A} \subseteq \tilde{A}) \equiv \forall \tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \forall x \in X\,(\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_A(x)). \tag{5.11}$$

За умови $\omega_A(x) = +$ із означення реалізації $\tilde{A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ випливає, що $\mu_A(x) \geq \alpha_A(x)$, а значить мінімально можливе значення $\mu_A(x)$ дорівнює $\alpha_A(x)$. Тому згідно з (5.11) для будь-якої реалізації $\tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}})$ умова $\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_A(x)$ може виконуватись, тільки якщо

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \alpha_A(x),$$

що відповідає (5.9).

Для випадку $\omega_A(x) = -$ із означення реалізації слабкої множини випливає, що для будь-якої реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$

$$\mu_A(x) \le \alpha_A(x),$$

а значить мінімально можливе значення $\mu_A(x)$ дорівнює $\min M_\alpha = 0$. Тому згідно з (5.11) для будь-якої реалізації $\tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}})$ умова

$$\mu_{\underline{A}}(x) \le \mu_A(x)$$

може виконуватись, тільки якщо $\mu_{\underline{A}}(x) = 0$, що й потрібно було показати для доведення твердження (5.9). Теорему доведено.♦

Наведемо приклади геометричної інтерпретації нижніх та верхніх реалізацій слабких множин. На рис. 5.1 показана нижня, а на рис. 5.2 – верхня реалізації слабкої множини, зображеної раніше на рис. 3.2.

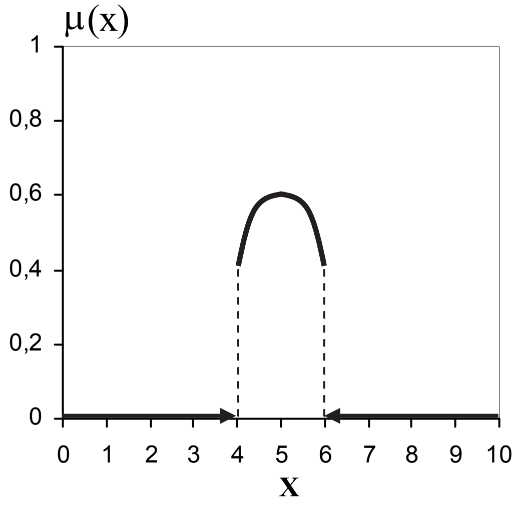


Рисунок 5.1 – Нижня реалізація слабкої множини, зображеної на рис. 3.2

З огляду на введене в цій роботі геометричне тлумачення слабкої множини та її реалізацій введемо також поняття *області (зони) реалізацій* слабкої множини (рис. 5.3) як множини точок в декартових осях координат, які задовольняють означення реалізації слабкої множини, зображеної в цих же осях.

На рис. 5.3 зображена зона реалізацій слабкої множини, яка була задана раніше на рис. 3.2. Із наведеного рисунка легко бачити, що зона реалізацій слабкої множини обмежується знизу та зверху її відповідно нижньою та верхньою реалізаціями.

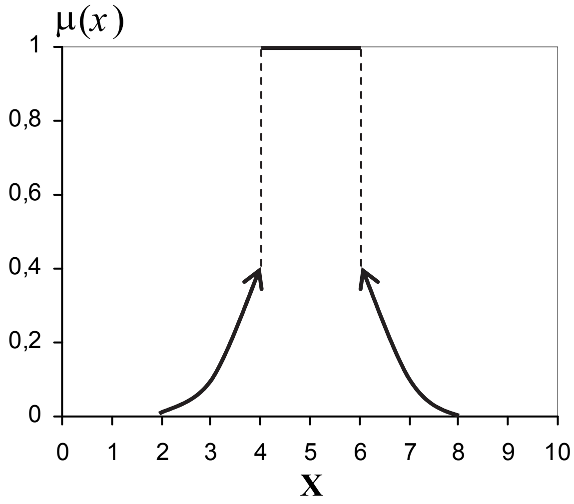


Рисунок 5.2 – Верхня реалізація слабкої множини, зображеної на рис. 3.2

Згідно з означенням області реалізацій слабкої множини всі без виключення точки графіка належності будь-якої її нечіткої реалізації повинні належати області реалізацій цієї слабкої множини. На цій підставі можна вважати, що область реалізацій слабкої множини є геометричним зображенням її множини всіх реалізацій.

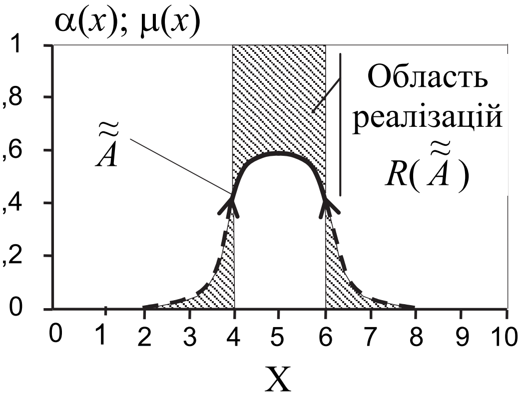


Рисунок 5.3 – Слабка множина в декартових осях координат
та її область нечітких реалізацій

5.3 Обумовлені множини реалізацій слабких множин

Довільну підмножину множини всіх реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X будемо називати просто *множиною реалізацій слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$ і позначати $K(\tilde{\tilde{A}}) \subseteq R(\tilde{\tilde{A}})$.

Введемо поняття верхньої та нижньої реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X на множині реалізацій $K(\tilde{\tilde{A}})$, позначаючи їх відповідно $\overline{A}^K$ та $\underline{A}^K$.

Нечітка множина $\overline{A}^K$ в X є *верхньою реалізацією слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$ *в X на множині реалізацій* $K(\tilde{\tilde{A}})$, якщо

$$\overline{A}^K \in K(\tilde{\tilde{A}}) \wedge \forall \tilde{A} \in K(\tilde{\tilde{A}})\ (\overline{A}^K \supseteq \tilde{A}). \tag{5.12}$$

Нечітка множина $\underline{A}^K$ в X є *нижньою реалізацією слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$ *в X на множині реалізацій* $K(\tilde{\tilde{A}})$, якщо

$$\underline{A}^K \in K(\tilde{\tilde{A}}) \wedge \forall \tilde{A} \in K(\tilde{\tilde{A}})\ (\underline{A}^K \subseteq \tilde{A}). \tag{5.13}$$

Якщо виникне необхідність підкреслити, що верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на множині реалізацій $K(\tilde{\tilde{A}})$ є нечіткими множинами, то будемо використовувати позначення $\overline{\tilde{A}}^K$ та $\underline{\tilde{A}}^K$ відповідно.

Із (5.12) випливає, що верхня реалізація слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X на множині реалізацій $K(\tilde{\tilde{A}})$ є найбільшою нечіткою множиною, яка належить системі нечітких множин $K(\tilde{\tilde{A}})$. В свою чергу нижня реалізація $\underline{\tilde{A}}^K$ згідно з (5.13) є найменшою нечіткою множиною системи нечітких множин $K(\tilde{\tilde{A}})$. Оскільки система $K(\tilde{\tilde{A}})$ згідно з означенням може бути довільною підмножиною множини $R(\tilde{\tilde{A}})$ всіх реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X, то вона зокрема може не утримувати слабких множин, які відповідають означенню як нижньої, так і верхньої реалізацій слабкої множини. Це означає, що на такій множині реалізацій слабка множина не буде мати верхньої та нижньої реалізації. Про таку множину реалізацій $K(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ ми будемо говорити, що вона *відкрита*.

Множину реалізацій $K(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, на якій буде існувати лише верхня або лише нижня реалізація, будемо називати *напіввідкритою*. Якщо ж для деякої множини реалізацій $K(\tilde{\tilde{A}})$ будуть існувати верхня та нижня реалізації, то таку множину реалізацій будемо називати *замкненою*.

Із теореми 5.2 випливає, що множина всіх нечітких реалізацій будь-якої слабкої множини є замкненою.

Далі введемо поняття обумовлених множин нечітких реалізацій слабкої множини.

Нехай нечітка множина $\tilde{B}$ є деякою довільною реалізацією слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Тоді система нечітких множин $\overline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$ є множиною нечітких реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, *обумовленою зверху* нечіткою реалізацією $\tilde{B}$, якщо виконується така рівність за означенням:

$$\overline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B}) \overset{df}{=} \{\,\tilde{A} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \mid \tilde{B} \supseteq \tilde{A}\,\}. \tag{5.14}$$

Із (5.14) випливає, що обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{B}$, множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ утримує тільки ті реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, які включені в нечітку реалізацію $\tilde{B}$. Тобто нечітка реалізація $\tilde{B}$ є найбільшою в множині реалізацій $\overline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$.

Порівнюючи означення (5.12) з означенням (5.14), приходимо до висновку, що реалізація $\tilde{B}$ є верхньою реалізацією слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на множині реалізацій $\overline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$.

Тепер введемо поняття обумовленої знизу множини реалізацій $\underline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$.

Нехай, як і в попередньому випадку, $\tilde{B}\in R(\tilde{\tilde{A}})$. Тоді система нечітких множин $\underline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$ є множиною нечітких реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, *обумовленою знизу* нечіткою реалізацією $\tilde{B}$, якщо має місце така рівність за означенням:

$$\underline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B}) \overset{df}{=} \{\tilde{A}\in R(\tilde{\tilde{A}}) \mid \tilde{B}\subseteq \tilde{A}\}, \tag{5.15}$$

Із (5.15) випливає, що обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{B}$ множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ утримує тільки ті реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, які включають нечітку реалізацію $\tilde{B}$. Таким чином, нечітка реалізація $\tilde{B}$ є найменшою в множині реалізацій $\underline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$.

Порівнюючи означення (5.13) з означенням (5.15), приходимо до висновку, що реалізація $\tilde{B}$ є нижньою реалізацією слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на множині реалізацій $\underline{R}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{B})$

Множина всіх нечітких реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ може бути обумовленою як зверху, так і знизу. Нехай множина всіх нечітких реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{A}_1\in R(\tilde{\tilde{A}})$ і одночасно обумовлена знизу нечіткою реалізацією $\tilde{A}_2\in R(\tilde{\tilde{A}})$. В такому випадку для множини нечітких реалізацій $\overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовленої зверху та знизу нечіткими реалізаціями відповідно $\tilde{A}_1$ та $\tilde{A}_2$, будемо мати таку рівність за означенням:

$$\overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{A}_1,\tilde{A}_2) \overset{df}{=} \{\tilde{A}\in R(\tilde{\tilde{A}}) \mid \tilde{A}_1\supseteq\tilde{A}\supseteq \tilde{A}_2\}. \tag{5.16}$$

Як і у випадку означень (5.14) та (5.15), для означення (5.16) можемо констатувати, що реалізації $\tilde{A}_1$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ є найбільшою із нечітких реалізацій множини реалізацій $\overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$, а реалізація $\tilde{A}_2$ є найменшою в множині реалізацій $\overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}},\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$. Тобто нечітка реалізація $\widetilde{A}_1$ є верхньою реалізацією слабкої множини $\widetilde{\widetilde{A}}$ в множині реалізацій $\overline{\underline{R}}(\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2)$, а нечітка реалізація $\widetilde{A}_2$ – її нижньою реалізацією на тій же множині реалізацій.

Для того, щоб чітко усвідомити різницю в поняттях множини реалізацій $K(\widetilde{\widetilde{A}})$ слабкої множини $\widetilde{\widetilde{A}}$ та обумовлених множин реалізацій цієї слабкої множини, порівняємо ці поняття. Множина реалізацій $K(\widetilde{\widetilde{A}})$ слабкої множини $\widetilde{\widetilde{A}}$ може бути будь-якою підмножиною множини всіх реалізацій $R(\widetilde{\widetilde{A}})$ множини $\widetilde{\widetilde{A}}$ в той час, як обумовлені множини реалізацій згідно зі своїми означеннями повинні обов’язково утримувати тільки ті реалізації, які включаються деякою заданою реалізацією $\widetilde{B}$ (для випадку обумовленої зверху множини реалізацій $\overline{R}(\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{B})$) або включають цю реалізацію (для випадку обумовленої знизу множини реалізацій $\underline{R}(\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{B})$), або включаються деякою заданою реалізацією $\widetilde{A}_1$ та одночасно включають деяку в загальному випадку іншу задану реалізацію $\widetilde{A}_2$ (для обумовленої зверху і знизу множини реалізацій).

Очевидно, що у випадку, коли нечіткі реалізації, які обумовлюють множину нечітких реалізацій $\overline{\underline{R}}(\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2)$ слабкої множини $\widetilde{\widetilde{A}}$ зверху та знизу, збігаються, тобто $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_r$, то обумовлена множина реалізацій $\overline{\underline{R}}(\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{A}_r,\widetilde{A}_r)$ перетворюється в одноелементну множину, яка утримує тільки нечітку реалізацію $\widetilde{A}_r$, тобто

$$\forall\, \widetilde{A}_r \in R(\widetilde{\widetilde{A}})\,(\,\overline{\underline{R}}(\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{A}_r,\widetilde{A}_r) = \{\,\widetilde{A}_r\,\}).$$

Таким чином, щоб задати будь-яку обумовлену множину реалізацій, потрібно задати верхню або нижню або верхню та нижню реалізації для відповідних обумовлених множин реалізацій.

Введемо для цих верхніх та нижніх реалізацій спеціальні назви та позначення, тобто введемо поняття *обумовленої верхньої* та *обумовле-*

ної нижньої реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в *X*, позначаючи їх відповідно $\overline{\overline{A}}$ та $\underline{\underline{A}}$.

Множина $\overline{\overline{A}}$ є обумовленою верхньою реалізацією слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в *X*, якщо вона є верхньою реалізацією на множині реалізацій $\overline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}})$ або на множині реалізацій $\underline{\overline{R}}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}}, \underline{\underline{A}})$. Множина $\underline{\underline{A}}$ є обумовленою нижньою реалізацією слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в *X*, якщо вона є нижньою реалізацією на множині реалізацій $\underline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}})$ або на множині реалізацій $\underline{\overline{R}}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}}, \underline{\underline{A}})$. Коли необхідно буде підкреслити, що обумовлені верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ є нечіткими множинами, будемо вживати також позначення $\overline{\overline{\tilde{A}}}$ та $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ відповідно.

Безпосередньо із означень нових понять, введених в цьому підрозділі, випливають такі співвідношення, які виконуються для будь-якої слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$:

$$\forall \tilde{\tilde{A}} \, \forall \underline{\underline{A}}, \, \overline{\overline{A}} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \, (\underline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \underline{\underline{A}}) \subseteq R(\tilde{\tilde{A}}) \;\wedge\; (\overline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}}) \subseteq R(\tilde{\tilde{A}})\,);$$

$$\forall \tilde{\tilde{A}} \, \forall K(\tilde{\tilde{A}}) \, (K(\tilde{\tilde{A}}) \subseteq R(\tilde{\tilde{A}})\,);$$

$$\forall \tilde{\tilde{A}} \, \forall \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{A}} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \;\wedge\; \underline{\underline{A}} \supseteq \underline{A});$$

$$\forall \tilde{\tilde{A}} \, \forall \overline{\overline{A}} \; (\overline{\overline{A}} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \;\wedge\; \overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}\,).$$

Як уже відзначалось вище, означення (5.12), (5.13) не гарантують наявності у будь-якої слабкої множини верхньої та нижньої реалізацій на довільній множині реалізацій. В той же час згідно з означеннями (5.14)– (5.16) будь-яка слабка множина $\tilde{\tilde{A}}$ утримує верхню та нижню реалізації на обумовлених множинах реалізацій. При цьому верхня реалізація слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на обумовленій зверху множині нечітких реалізацій $\overline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}})$ дорівнює обумовленій верхній реалізації $\overline{\overline{A}}$, а нижня – нижній реалізація слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, тобто

$$\forall \overline{\overline{A}} \in R(\tilde{\tilde{A}}) \, (\overline{A}^{\overline{R}} = \overline{\overline{A}} \;\wedge\; \underline{A}^{\overline{R}} = \underline{A}).$$

Нижня реалізація слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на обумовленій знизу множині нечітких реалізацій $\underline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \underline{\underline{A}})$ дорівнює обумовленій нижній реалізації $\underline{\underline{A}}$, а верхня – верхній реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, тобто

$$\forall\, \underline{\underline{A}} \in R(\tilde{\tilde{A}})\,(\underline{A}^{\underline{R}} = \underline{\underline{A}} \wedge \overline{A}^{\underline{R}} = \overline{A}).$$

Верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на обумовленій зверху та знизу множині реалізацій $\overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{\overline{A}}, \underline{\underline{A}})$ дорівнюють відповідно нижній та верхній обумовленим реалізаціям, тобто

$$\forall\, \underline{\underline{A}},\ \overline{\overline{A}} \in R(\tilde{\tilde{A}})\,(\underline{A}^{\overline{\underline{R}}} = \underline{\underline{A}} \wedge \overline{A}^{\overline{\underline{R}}} = \overline{\overline{A}}).$$

Очевидно множина всіх реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ є окремим випадком обумовленої множини реалізацій таким, що:

$$R(\tilde{\tilde{A}}) = \overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}}, \overline{A}, \underline{A}).$$

5.4 Слабкі множини з одноелементною множиною всіх реалізацій

Введене поняття реалізації слабкої множини має велике значення для теорії слабких множин, оскільки дозволяє зрозуміти сутність зв'язку між слабкими, звичайними та нечіткими множинами.

Легко бачити, що нечіткі множини можуть переходити в звичайні множини. Нехай область прибуття функції належності нечіткої множини дорівнює відрізку [0; 1]. Тоді за умови, що $\operatorname{Im}\mu = \{0; 1\}$, функція належності нечіткої множини перетворюється в характеристичну функцію звичайної множини.

Але функція напрямлених рівнів слабкої множини, як було сказано вище, формально не зводиться до функції належності нечіткої множини та характеристичної функції звичайної множини. Будь-яка слабка множина лише пов'язана з множиною своїх реалізацій.

За необхідності слабка множина несуперечливо може бути замінена на одну із цих реалізацій. Однак така заміна в загальному випадку не може бути однозначною, оскільки множина реалізацій слабкої множини може бути багатоелементною або нескінченою.

Логічно було б вважати, що слабка множина переходить в звичайну або нечітку множину, якщо цією звичайною (відповідно нечіткою) множиною є її єдина реалізація, а значить інших звичайних або нечітких множин, які не суперечать цій слабкій множині, не існує.

Таким чином, для встановлення зв'язку між слабкими, звичайними та нечіткими множинами необхідно переконатись в можливості існування слабких множин з одноелементною множиною реалізацій, а також вияснити, за яких умов така ситуація повинна мати місце.

Поставлені задачі розв'язуються в результаті доведення наступних теорем, які визначають необхідні і достатні умови для існування одноелементної множини всіх реалізацій слабкої множини і показують, що цією єдиною реалізацією слабкої множини може бути тільки звичайна канторова множина.

Теорема 5.3. Множина всіх реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X утримує тільки одну реалізацію $A \subseteq X$, тоді і тільки тоді, коли функція напрямлених рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ задовольняє умову

$$\forall x \in X\, (\nu_A(x) = (\min M_\alpha\, ;\, \min M_\omega\,)\ \vee\ \nu_A(x) = (\max M_\alpha\, ;\, \max M_\omega\,)\,).$$

Доведення. Доведемо спочатку пряме твердження.

Припустимо, що умова прямого твердження вірна, а висновок – ні, тобто

$$\exists x \in X\, (\nu_A(x) \neq (\min M_\alpha\, ;\, \min M_\omega\,)\ \wedge\ \nu_A(x) \neq (\max M_\alpha\, ;\, \max M_\omega\,)\,). \quad (5.17)$$

Враховуючи те, що

$$(\min M_\alpha;\, \min M_\omega) = 0^{-}\ \text{ і }\ (\max M_\alpha;\, \max M_\omega) = 1^{+},$$

а також те, що

$$(\nu_A(x) \neq (\min M_\alpha\, ;\, \min M_\omega) \equiv \nu_A(x) > 0^{-},$$

а

$$\nu_A(x) \neq (\max M_\alpha;\, \max M_\omega) \equiv \nu_A(x) < 1^{+},$$

перепишемо (5.17) в такому рівносильному вигляді:

$$\exists x \in X\, (\, 0^{-} < \nu_A(x) < 1^{+}\,). \quad (5.18)$$

Згідно з отриманою умовою (5.18) та означенням реалізації (5.2) повинна існувати така реалізація слабкої множини $\approx{A}$, що $0 < \mu_A(x) < 1$. Крім того згідно з (5.2) повинна існувати принаймні ще одна реалізація, для якої залежно від напрямленості рівня належності елемента x буде мати місце одне із двох

$$\omega(x) = - \ \Rightarrow \ \mu(x) = 0 \quad \text{або} \quad \omega(x) = + \ \Rightarrow \ \mu(x) = 1.$$

Але це суперечить умові прямого твердження. Таким чином, пряме твердження доведено.

Доведемо обернене твердження. Умову оберненого твердження запишемо в такому рівносильному вигляді:

$$\forall x \in X \, (\, \nu_A(x) = 0^- \ \vee \ \nu_A(x) = 1^+ \,). \qquad (5.19)$$

Покажемо, що виконання умови (5.19) можливе тільки при єдиному значенні функції належності елемента $x \in X$ реалізації слабкої множини $\overset{\approx}{A}$, яке залежить від напрямленості цього елемента по відношенню до слабкої множини $\overset{\approx}{A}$.

Згідно з (5.19) та (5.2) у випадку, якщо напрямленість елемента $x \in X$ по відношенню до слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ негативна ($\omega_A(x) = -$), то повинні виконуватись умови $\nu_A(x) = 0^-$ і $\mu_A(x) \le \alpha_A(x)$. Виконання першої умови можливе тільки, якщо $\alpha_A(x) = 0$. Підставляючи це значення в другу умову, отримаємо $\mu_A(x) \le 0$. Але виконання останньої умови можливе тільки, якщо $\mu_A(x) = 0$.

Якщо напрямленість елемента $x \in X$ по відношенню до слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ позитивна ($\omega_A(x) = +$), то згідно з (5.19) та (5.2) повинні виконуватись умови $\nu_A(x) = 1^+$ та $\mu_A(x) \ge \alpha_A(x)$ відповідно. Виконання першої умови можливе, тільки якщо $\alpha_A(x) = 1$. Підставляючи це значення в другу умову, отримаємо $\mu_A(x) \ge 1$. Але останнє співвідношення може виконуватись, тільки якщо $\mu_A(x) = 1$.

Таким чином, за умови (5.19) довільний елемент $x \in X$ може мати тільки одне значення належності реалізації слабкої множини $\overset{\approx}{A}$, яке залежить лише від напрямленості цього елемента по відношенню до слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Але це означає, що за умови (5.19) у слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ може бути тільки одна реалізація. Теорему доведено.♦

Теорема 5.4. Єдиною реалізацією в одноелементній множині реалізацій слабкої множини може бути лише звичайна канторова множина.

Доведення. Нехай слабка множина $\tilde{\tilde{A}}$ в X в своїй одноелементній множині реалізацій $R(\tilde{\tilde{A}})$ утримує нечітку реалізацію $\tilde{A}$, яка не є звичайною множиною A. Тоді згідно з (5.2) повинен існувати елемент $x \in \mathrm{X}$, ступінь належності якого нечіткій реалізації $\tilde{A}$ строго менше одиниці та строго більше нуля, тобто

$$0 < \mu(x) < 1. \qquad (5.20)$$

Але в такому випадку в множині всіх реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ повинно існувати принаймні дві різних реалізації. Дійсно, функція належності однієї із цих реалізацій повинна задовольняти умові (5.20). Якщо $\omega(x) = -$, то згідно з (5.2) повинна існувати також інша реалізація, для якої елемент x буде мати ступінь належності $\mu(x) = 0$. У випадку, коли елемент x буде мати протилежну напрямленість рівня належності слабкій множині $\tilde{\tilde{A}}$, тобто $\omega(x) = +$, то повинна також існувати ще принаймні одна реалізація, для якої елемент x буде мати степінь належності $\mu(x) = 1$. Тим самим ми приходимо до суперечності.♦

Таким чином доведено, що множина всіх реалізацій слабкої множини може утримувати тільки одну реалізацію, і ця реалізація може буде лише звичайною множиною. Необхідні і достатні умови для цього задає теорема 5.3. В цьому випадку будемо говорити, що слабка множина переходить в звичайну множину але навіть для цього випадку будемо відрізняти саму слабку множину від її єдиної реалізації. Подібний випадок має місце в теорії звичайних множин, де одноелементна множина відрізняється від елемента, із якого вона складається.

До слабких множин, що відповідають умовам, які задає теорема 5.3, відносяться зокрема пуста та повна слабкі множини. Єдиною реалізацією пустої слабкої множини $\overset{\approx}{\varnothing}$ є звичайна пуста множина $\varnothing$, а єдиною реалізацією повної слабкої множини $\overset{\approx}{X}$ є універсум X.

Теорема 5.4 показує, що слабка множина ні за яких умов не переходить у нечітку множину відмінну від звичайної канторової множини. Вона лише пов'язана з множиною своїх реалізацій, які не суперечать наведеній в підрозділі 5.1 інтерпретації напрямлених рівнів належності як верхніх або нижніх точних граней можливих ступенів належності ще не сформованій нечіткій множині. На цій підставі можна вважати, що оперуючи зі слабкими множинами, ми одночасно оперуємо зі всіма сімействами їх нечітких реалізацій.

Покажемо, що для слабких множин з одноелементною множиною реалізацій має місце така теорема.

Теорема 5.5. Носій будь-якої слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в X з єдиною реалізацією A дорівнює цій реалізації, тобто $\operatorname{supp}\overset{\approx}{A} = A$.

Доведення. Теорема 5.3 стверджує, що функція напрямлених рівнів слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ з одноелементною множиною реалізацій може приймати тільки два значення, а саме

$$\forall x \in X(\nu_A(x) = 0^- \vee \nu_A(x) = 1^+). \tag{5.21}$$

Тому згідно з означенням носія слабкої множини (2.17) в цьому випадку

$$\operatorname{supp}\overset{\approx}{A} = \{x \in X \mid \nu_A(x) = 1^+\}. \tag{5.22}$$

Теорема 5.4 дозволяє стверджувати, що єдиною реалізацією слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ може бути тільки звичайна множина A, для якої згідно з означенням звичайної реалізації (5.1) виконується твердження

$$\forall x \in X\,(x \in A \Leftrightarrow \omega_A(x) = +).$$

Тобто єдиній звичайній реалізації A слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ належать тільки ті елементи універсума X, які мають позитивну напрямленість рівнів належності слабкій множині $\overset{\approx}{A}$. Але згідно з (5.21), (5.22) ці і тільки ці елементи належать також носію слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Тому $\operatorname{supp}\tilde{\tilde{A}} = A$.◆

Безпосередньо із доведеної теореми випливає, що потужність слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ з одноелементною множиною реалізацій дорівнює потужності її єдиної звичайної реалізації A, тобто $\operatorname{card}\tilde{\tilde{A}} = \operatorname{card} A$.

5.5 Види слабких множин в залежності від значень рівнів належності та напрямленостей цих рівнів

Введемо поняття *множини рівнів* $M_{\alpha A}$ та *множини напрямленостей* $M_{\omega A}$ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X:

$$M_{\alpha A} \overset{df}{=} \{\alpha \in M_{\alpha} \,|\, (\alpha, \omega) \in \nu_A(X)\}; \tag{5.23}$$

$$M_{\omega A} \overset{df}{=} \{\omega \in M_{\omega} \,|\, (\alpha, \omega) \in \nu_A(X)\}, \tag{5.24}$$

де $\nu_A(X)$ – образ універсума X при відображенні ν_A.

Як видно із означення (5.23), множина рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X утримує всі ненапрямлені рівні, які приймали участь у формуванні цієї слабкої множини, тобто формально є областю значень її функції ненапрямлених рівнів належності α_A. Аналогічно, множина напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X згідно з (5.24) утримує всі напрямленості, які приймали участь у її формуванні, тобто формально є областю значень її функції напрямленостей рівнів належності ω_A.

Розглянемо деякі види слабких множин залежно від особливостей їх множин рівнів та напрямленостей.

5.5.1 Позитивно, негативно та змішано напрямлені слабкі множини

Оскільки множина напрямленостей рівнів належності M_{ω} двоелементна, то множиною напрямленостей будь-якої слабкої множини може бути тільки одна із таких трьох множин: $\{-\}$, $\{+\}$, $\{-, +\}$. У відповідності до цього введемо поняття *позитивної, негативної та змішано* *напрямлених слабких множин*, позначаючи позитивно, негативно та змішано напрямлені слабкі множини відповідно ${}^{+}\overset{\approx}{A}$, ${}^{-}\overset{\approx}{A}$ та ${}^{\pm}\overset{\approx}{A}$.

$$ {}^{+}\overset{\approx}{A} \overset{df}{\Leftrightarrow} M_{\omega A} = \{+\}; \tag{5.25}$$

$$ {}^{-}\overset{\approx}{A} \overset{df}{\Leftrightarrow} M_{\omega A} = \{-\}; \tag{5.26}$$

$$ {}^{\pm}\overset{\approx}{A} \overset{df}{\Leftrightarrow} M_{\omega A} = \{-,+\}. \tag{5.27}$$

Очевидно, що

$$ {}^{\pm}\overset{\approx}{A} \equiv \forall x{\in}X\,(\omega_A(x) = + \ \vee \ \omega_A(x) = -); $$

$$ {}^{+}\overset{\approx}{A} \equiv \forall x{\in}X\,(\omega_A(x) = +); $$

$$ {}^{-}\overset{\approx}{A} \equiv \forall x{\in}X\,(\omega_A(x) = -). $$

Позитивно, негативно та змішано напрямлені слабкі множини будемо називати також просто *позитивними*, *негативними* та *змішаними* слабкими множинами, а позитивно та негативно напрямлені слабкі множини – *однонапрямленими*.

Доведемо теореми про те, що універсум є звичайною реалізацією будь-якої позитивно напрямленої слабкої множини, а пуста множина є реалізацією будь-якої негативно напрямленої слабкої множини.

Теорема 5.6. Верхня реалізація будь-якої позитивно напрямленої слабкої множини є звичайною множиною і дорівнює універсуму, тобто

$$ \forall\, {}^{+}\overset{\approx}{A} \in M^{X}_{\alpha\omega}\,(\overline{A} = X). $$

Доведення. Згідно з (5.25) для будь-якої позитивно напрямленої слабкої множини ${}^{+}\overset{\approx}{A}$ виконується умова $\forall x{\in}X(\omega_A(x) = +)$. Але в такому випадку згідно з (5.8) для ступенів належності елементів універсума верхній реалізації слабкої множини ${}^{+}\overset{\approx}{A}$ будемо мати

$$\forall x \in X\,(\,\mu_{\overline{A}}(x) = 1),$$

що відповідає характеристичній функції універсума. ♦

Теорема 5.7. Нижня реалізація будь-якої негативно напрямленої слабкої множини є пустою множиною, тобто

$$\forall\, {}^{-}\tilde{\tilde{A}} \in M_{\alpha\omega}^{X}\ (\,\underline{A} = \varnothing\,).$$

Доведення. Згідно з (5.26) напрямленості елементів універсума по відношенню до будь-якої негативно напрямленої слабкої множини ${}^{-}\tilde{\tilde{A}}$ є негативними, тобто $\forall x \in X(\omega_A(x) = -)$. Але в такому випадку згідно з (5.9) значення належності будь-якого елемента універсума нижній реалізації слабкої множини ${}^{-}\tilde{\tilde{A}}$ дорівнює нулю, тобто $\forall x \in X\,(\,\mu_{\underline{A}}(x) = 0)$, що відповідає характеристичній функції пустої множини. ♦

5.5.2 Класи напрямленостей слабких множин

Введемо поняття класів напрямленостей слабкої множини. Для цього звернемо увагу на одну особливість змішаних слабких множин.

Будь-яка змішана слабка множина в X розбиває елементи універсума на два класи. Перший із цих класів утримує всі елементи універсума із негативною напрямленістю рівнів належності, а другий – елементи із позитивною напрямленістю рівнів належності. Надалі ці класи елементів універсума будемо називати відповідно класами негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини.

Дамо строге означення *класів негативної та позитивної напрямленостей* слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X, позначаючи їх відповідно ${}^{-}X_A$ та ${}^{+}X_A$:

$${}^{-}X_A \overset{df}{=} \{x \in X \mid \omega_A(x) = -\}; \tag{5.28}$$

$${}^{+}X_A \overset{df}{=} \{x \in X \mid \omega_A(x) = +\}. \tag{5.29}$$

Із означень (5.28)–(5.29) та означення слабкої множини безпосередньо випливає, що класи негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ в X не перетинаються і повністю вичерпують універсум X, тобто:

$$^{+}X_A \cap {}^{-}X_A = \varnothing; \tag{5.30}$$

$$^{+}X_A \cup {}^{-}X_A = X. \tag{5.31}$$

Очевидно, що довільні негативно напрямлена слабка множина $^{-}\overset{\approx}{A}$ в X або позитивно напрямлена слабка множина $^{+}\overset{\approx}{B}$ в X будуть створювати в X тільки один непустий клас напрямленості, а саме клас негативної $^{-}X_A$ або позитивної $^{+}X_B$ напрямленості. В таких випадках будемо мати:

$$^{-}X_A = X; \quad ^{+}X_A = \varnothing;$$

$$^{+}X_B = X; \quad ^{-}X_B = \varnothing.$$

Слід звернути увагу, що згідно з означеннями (2.23), (2.26) пуста слабка множина породжує тільки один непустий негативно напрямлений клас, до якого належать всі елементи універсума, а повна слабка множина породжує тільки позитивно напрямлений непустий клас рівний універсуму, тобто

$$^{-}X_{\varnothing} = X; \quad ^{+}X_{\varnothing} = \varnothing;$$

$$^{+}X_X = X; \quad ^{-}X_X = \varnothing.$$

Відомо [112], що розбиття будь-якої множини на підмножини, які не перетинаються, задає в цій множині деяке відношення еквівалентності, а будь-яке відношення еквівалентності між елементами будь-якої множини розбиває цю множину на підмножини, які не перетинаються і називаються класами еквівалентності відповідного відношення.

В нашому випадку класи негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ задають в універсумі X відношення еквівалентності, яке вербально описується фразою «мати однакову напрямленість рівнів належності». Це відношення, як і будь-яке інше відношення еквівалентності, є рефлексивним, симетричним та транзитивним, а класи негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\approx{A}$ в X є його класами еквівалентності.

Розглянемо декілька прикладів.

Слабка множина загального виду, зображена на рис. 3.2, задається виразом

$$\overset{\approx}{A} = \int\limits_{x\in[0;4)} x\,|\,\alpha_A(x)^- + \int\limits_{x\in[4;6]} x\,|\,\alpha_A(x)^+ + \int\limits_{x\in(6;10]} x\,|\,\alpha_A(x)^-,$$

а її класи негативної ${}^-X_A$ та позитивної ${}^+X_A$ напрямленостей є відповідно множинами

$${}^-X_A = [0;\,4) \cup (6;\,10]; \quad {}^+X_A = [4;\,6].$$

Для дискретної слабкої множини зображеної на рис. 3.1, будемо мати:

$${}^-X = \{0;\,1;\,2;\,8;\,9;\,10\}; \quad {}^+X = \{3;\,4;\,5;\,6;\,7\}.$$

Слабка множина, задана на рис. 3.4, створює в $X = [0;\,10]$ такі класи напрямленостей:

$${}^-X = [0;\,3{,}5) \cup (6{,}5;\,10]; \quad {}^+X = [3{,}5;\,6{,}5].$$

Введемо також більш універсальне поняття *класів негативної та позитивної напрямленостей звичайної непустої підмножини D універсума відносно заданої в цьому універсумі слабкої множини* $\overset{\approx}{A}$, позначаючи ці класи відповідно ${}^-D_A$ та ${}^+D_A$:

$${}^-D_A \overset{df}{=} \{x\in D \mid \omega_A(x) = -\}; \tag{5.32}$$

$${}^+D_A \overset{df}{=} \{x\in D \mid \omega_A(x) = +\}. \tag{5.33}$$

Із означень (5.32), (5.33) видно, що в клас негативної напрямленості множини $D \subseteq X$ відносно слабкої множини $\overset{\approx}{A} \subseteq \overset{\approx}{X}$ входять тільки ті елементи цієї множини, які знаходяться на негативному рівні належності до слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, а до класу позитивної напрямленості звичайної підмножини D універсума X відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ належать тільки ті елементи множини D, які знаходяться на позитивному рівні належності до слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Очевидно, що залежно від вибраної підмножини D універсума та заданої в цьому універсумі слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ один із цих класів може бути пустим.

Класи негативної та позитивної напрямленостей довільної звичайної підмножини D універсума X відносно будь-якої слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X мають властивості, аналогічні властивостям (5.30) та (5.31) класів негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X, а саме

$$ {}^{+}D_A \cap {}^{-}D_A = \varnothing; \tag{5.34}$$

$$ {}^{+}D_A \cup {}^{-}D_A = D. \tag{5.35}$$

Ці властивості безпосередньо випливають із означень (5.32)–(5.33).

Із означень (5.32), (5.33) та (5.28), (5.29) випливає також, що класи негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X є окремим випадком класів негативної та позитивної напрямленостей звичайної непустої підмножини D універсума X відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, який відповідає умові $D = X$.

РОЗДІЛ 6
ЗВИЧАЙНІ ФУНКЦІЇ СЛАБКОГО АРГУМЕНТУ

В цьому розділі розроблюються принципи узагальнення для слабких множин, які дозволять визначати значення звичайних функцій при слабкому рівні визначеності її аргументів, що дасть можливість математично моделювати функціональні зв'язки між входом та виходом складної системи в умовах відсутності не тільки детермінованих, а навіть нечітко заданих вхідних даних.

Як відомо, принцип узагальнення для нечітких множин, який вперше був запропонований Л. Заде [99, 132], дає можливість знайти образ будь-якої нечіткої підмножини $\widetilde{A}$ області визначення X деякого звичайного відображення $\mathrm{f} : X \to Y$. Необхідність визначення таких образів виникає в процесі математичного моделювання функціональних зв'язків між деякими величинами в умовах нечітко заданих аргументів функції f.

Функцію належності образу нечіткої множини $\widetilde{A}$ згідно з цим принципом можна записати у вигляді, який був запропонований С. А. Орловським [82]:

$$\forall y \in Y(\mu_{\mathrm{f}(A)}(y) = \sup_{x \in \mathrm{f}^{-1}(y)} \mu_A(x)). \tag{6.1}$$

Ми теж будемо використовувати таку форму запису принципу узагальнення для нечітких множин, а надалі – подібну форму запису принципу узагальнення для слабких множин, але з урахуванням однієї особливості, яка не була врахована в свій час ні в [99], ні в [82]. Область значень $\mathrm{Im}\,\mathrm{h} = \mathrm{f}(X)$ відображення f із X в Y в загальному випадку функції f не дорівнює Y [119]. Тобто може існувати такий $y \in Y$, що $y \notin \mathrm{f}(X)$, де $\mathrm{f}(X) = \mathrm{Im}\,\mathrm{f} = \{y \in Y \mid \exists x \in X(y = \mathrm{f}(x))\}$. Прообраз всіх таких $y \in Y$ при відображенні f буде пустим, тобто $\mathrm{f}^{-1}(y) = \varnothing$, і тому вираз (6.1) для всіх таких y втрачає сенс. З цієї причини принцип узагальнення для нечітких множин в загальному випадку ми будемо записувати більш строго та однозначно у вигляді:

$$\forall y \in Y\, \mu_{\mathrm{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in \mathrm{f}^{-1}(y)} \mu_A(x), \text{ якщо } y \in \mathrm{f}(X); \\ 0, \text{ якщо } \mathrm{f}^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases} \tag{6.2}$$

Що стосується рівності (6.1), то вона має сенс для кожного $y \in Y$ тільки у випадку, коли функція f є сюр'єкцією [93], для якої Im f = Y.

Як видно із (6.2), кожен $x \in X$ передає образу f(x) свій ступінь належності нечіткій множині $\widetilde{A}$, і кожному $y \in \mathrm{f}(X)$ остаточно залишається верхня точна грань множини переданих йому за допомогою функції f ступенів належності. А всі елементи області прибуття з пустим повним прообразом при відображенні f природно отримують нульовий ступінь належності образу нечіткої множини $\widetilde{A}$.

У випадку ін’єктивних функцій прообразом кожного елемента області значень є єдиний елемент області визначення функції [120] . Тому саме цей єдиний елемент передає своєму образу свій ступінь належності, який і залишається йому остаточно. Для цього випадку принцип узагальнення (6.2) буде мати більш простий вигляд:

$$\forall y \in Y\, \mu_{\mathrm{f}(A)}(y) = \begin{cases} \mu_A(\mathrm{f}^{-1}(y)), \text{ якщо } y \in \mathrm{f}(X); \\ 0, \text{ якщо } \mathrm{f}^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases} \tag{6.3}$$

Найбільш простий вигляд принцип узагальнення (6.2) буде мати для бієктивних функцій. Як відомо, в цьому випадку функція одночасно є ін'єкцією та сюр’єкцією, а отже прообразом кожного елемента області значень є єдиний елемент області визначення функції, а сама область визначення дорівнює області прибуття, тобто Im h = f(X) = Y. З урахуванням цих особливостей бієкції принцип узагальнення (6.2) можна подати у вигляді

$$\forall y \in Y(\mu_{\mathrm{f}(A)}(y) = \mu_A(\mathrm{f}^{-1}(y)). \tag{6.4}$$

Перед означенням принципу узагальнення для слабких множин введемо поняття верхньої та нижньої точних граней підмножини простору напрямлених рівнів належності аналогічно поняттям верхньої та нижньої точних граней звичайної підмножини [111, 133] та зокрема підмножини дійсних чисел [134, 135].

6.1 Точні грані підмножини простору напрямлених рівнів належності

Нехай множина M є підмножиною множини напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$. Використовуючи позначення $\geq$ для нестрогого порядку $D_{\alpha\omega}$ на $M_{\alpha\omega}$, введемо означення верхньої та нижньої точних граней множини M.

Напрямлений рівень належності $\alpha^{\omega}\in M_{\alpha\omega}$ є *верхня точна грань множини* $M\subseteq M_{\alpha\omega}$, якщо

$$\forall\beta^{\Psi}\in M(\alpha^{\omega}\geq\beta^{\Psi})\ \wedge$$

$$\wedge\ \forall\gamma^{\varphi}\in M_{\alpha\omega}(\forall\beta^{\Psi}\in M(\gamma^{\varphi}\geq\beta^{\Psi})\Rightarrow\gamma^{\varphi}\geq\alpha^{\omega}). \qquad (6.5)$$

Напрямлений рівень належності $\alpha^{\omega}\in M_{\alpha\omega}$ є *нижньою точною гранню множини* $M\subseteq M_{\alpha\omega}$, якщо

$$\forall\beta^{\Psi}\in M(\beta^{\Psi}\geq\alpha^{\omega})\ \wedge$$

$$\wedge\ \forall\gamma^{\varphi}\in M_{\alpha\omega}(\forall\beta^{\Psi}\in M(\beta^{\Psi}\geq\gamma^{\varphi})\Rightarrow\alpha^{\omega}\geq\gamma^{\varphi}). \qquad (6.6)$$

Будемо позначати ці грані по аналогії до точних граней звичайних множин відповідно $\sup M$ та $\inf M$ або, як це прийнято в теорії ґраток, $\vee M$ та $\wedge M$ відповідно.

Враховуючи (2.5), перепишемо (6.5) та (6.6) в більш детальному координатному вигляді:

$$\alpha^{\omega} = \sup M \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\beta^{\Psi}\in M(((\alpha\geq\beta\ \wedge\ \omega=\psi)\vee(\omega>\psi))\ \wedge$$

$$\wedge\ \forall\gamma^{\varphi}\in M_{\alpha\omega}(\forall\beta^{\Psi}\in M((\gamma\geq\beta\ \wedge\ \varphi=\psi)\vee(\varphi>\psi))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\gamma\geq\alpha\ \wedge\ \varphi=\omega)\vee(\varphi>\omega)).$$

$$\alpha^{\omega} = \inf M \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\beta^{\Psi}\in M(((\alpha\leq\beta\ \wedge\ \omega=\psi)\vee(\omega<\psi))\ \wedge$$

$$\wedge\ \forall\gamma^{\varphi}\in M_{\alpha\omega}(\forall\beta^{\Psi}\in M((\gamma\leq\beta\ \wedge\ \varphi=\psi)\vee(\varphi<\psi))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\gamma\leq\alpha\ \wedge\ \varphi=\omega)\vee(\varphi<\omega)).$$

Нехай звичайна множина B є деякою довільною підмножиною універсума X, на елементах якого задана слабка множина $\tilde{\tilde{A}}$. Дамо узгоджені з (6.5), (6.6) означення *верхньої та нижньої точних граней напрямлених рівнів належності елементів множини В відносно слабкої множини* $\tilde{\tilde{A}}$, позначаючи ці грані відповідно $\sup\limits_{x\in B} \nu_A(x)$ та $\inf\limits_{x\in B} \nu_A(x)$:

$$\alpha^{\omega} = \sup_{x\in B} \nu_A(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x_1 \in B(\alpha^{\omega} \geq \nu_A(x_1)) \ \wedge$$

$$\wedge \ \forall x_2 \in X\,(\forall x_1 \in B(\nu_A(x_2) \geq \nu_A(x_1) \ \Rightarrow \ (\alpha^{\omega} \leq \nu_A(x_2)); \qquad (6.7)$$

$$\alpha^{\omega} = \inf_{x\in B} \nu_A(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x_1 \in B(\alpha^{\omega} \leq \nu_A(x_1)) \ \wedge$$

$$\wedge \ \forall x_2 \in X\,(\forall x_1 \in B(\nu_A(x_2) \leq \nu_A(x_1) \ \Rightarrow \ (\alpha^{\omega} \geq \nu_A(x_2)), \qquad (6.8)$$

Тепер введемо принцип узагальнення для слабких множин, який задасть зв'язок між функціями рівнів будь-яких слабких множин, заданих в області визначення деякого звичайного відображення $\mathrm{f} : X \to Y$ та функціями рівнів образів цих слабких множин при відображенні f.

6.2 Принцип узагальнення для слабких множин

Принцип узагальнення для слабких множин повинен задати правило, яке за відомою функцією напрямлених рівнів ν_A: $X \to M_{\alpha\omega}$ слабкого аргументу $\tilde{\tilde{A}}$ звичайної функції $\mathrm{f} : X \to Y$ дає можливість визначити напрямлені рівні належності довільного елемента y області прибуття Y функції f.

Для будь-якого звичайного відображення $\mathrm{f} : X \to Y$ та будь-якої слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в X її *слабкий образ* $\mathrm{f}(\tilde{\tilde{A}})$ *в Y при відображенні* f визначається рівностями за означенням

$$\forall y \in Y \left(\nu_{\mathrm{f}(A)}(y) \overset{df}{=} \begin{cases} \sup\limits_{x\in \mathrm{f}^{-1}(y)} \nu_A(x), \text{ якщо } y \in \mathrm{f}(X); \\ 0^{-}, \text{ якщо } \mathrm{f}^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases} \right) \qquad (6.9)$$

де $\mathrm{f}^{-1}(y)$ – повний прообраз елемента $y \in Y$ при відображенні f.

Із введеного принципу узагальнення для слабких множин випливає, що образом слабкої множини при звичайному відображенні є слабка множина. Тому термін «слабкий образ» є оправданим. Функція належності образу слабкої множини згідно з введеним принципом узагальнення формується таким чином: кожен елемент x області визначення X звичайного відображення $\mathrm{f}: X \to Y$ передає образу $y = \mathrm{f}(x)$ свій напрямлений рівень $\nu_A(x)$ слабкої належності множині $\overset{\approx}{A} \subseteq \overset{\approx}{X}$, і у кожного елемента $y \in Y$, який належить області значень $\mathrm{f}(X)$ відображення f, остаточно залишається верхня точна грань переданих йому елементами його прообразу рівнів належності. Якщо елемент y області прибуття Y функції f не належить області значень цієї функції $\mathrm{f}(X)$ (тобто повний прообраз цього елемента при відображенні f пустий), то такому елементу приписується нульовий негативно напрямлений рівень належності.

У випадку, коли відображення $\mathrm{f}: X \to Y$ є ін’єкцією [120], принцип узагальнення (6.9) прийме більш простий вигляд. Оскільки прообразом кожного елемента області значень у випадку ін’єктивних функцій є єдиний елемент області визначення, то саме цей єдиний елемент передає своєму образу свій рівень слабкої належності, який і залишається йому остаточно. Із (6.9) для цього випадку отримаємо:

$$\forall y \in Y \left(\nu_{\mathrm{f}(A)}(y) \overset{df}{=} \begin{cases} \nu_A(\mathrm{f}^{-1}(y)), \text{ якщо } y \in \mathrm{f}(X); \\ 0^-, \text{ якщо } \mathrm{f}^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases} \right) \tag{6.10}$$

Найбільш простий вигляд принцип узагальнення прийме для бієктивного відображення $\mathrm{f}: X \to Y$.

Враховуючи, що прообразом кожного елемента області значень у випадку бієкції є єдиний елемент області визначення, а також виконується рівність $\mathrm{Im}\,\mathrm{f} = Y = \mathrm{f}(X)$, перепишемо (6.9) у вигляді

$$\forall y \in Y(\nu_{\mathrm{f}(A)}(y) = \nu_A(\mathrm{f}^{-1}(y)). \tag{6.11}$$

Для практичного використання введених принципів узагальнення для слабких множин доцільно виразити точні грані множин напрямлених рівнів належності через звичайні множини ненапрямлених рівнів належності.

6.3 Зв'язок між точними гранями множин напрямлених та ненапрямлених рівнів належності

Доведемо теореми, які виражають верхню та нижню точні грані напрямлених рівнів слабкої належності елементів довільної звичайної множини $D \subseteq X$ слабкій множині $\tilde{\tilde{A}}$ в X через відповідні звичайні точні грані ненапрямлених рівнів належності.

Спочатку доведемо теорему, яка дозволить виразити верхню точну грань напрямлених рівнів належності через звичайну верхню точну грань множин дійсних чисел. Це дасть можливість практично реалізувати розрахунки за принципом узагальнення (6.9).

Теорема 6.1.

$$\begin{aligned}
&\forall D \subseteq X \, \forall \tilde{\tilde{A}} \subseteq \tilde{\tilde{X}} \, \Big(\big(\forall x \in D \, (\omega_A(x) = +) \Rightarrow \sup_{x \in D} \nu_A(x) = \big(\sup_{x \in D} \alpha_A(x)\big)^+ \big) \wedge \\
&\wedge \big(\forall x \in D \, (\omega_A(x) = -) \Rightarrow \sup_{x \in D} \nu_A(x) = \big(\sup_{x \in D} \alpha_A(x)\big)^- \big) \wedge \\
&\wedge \big(\exists x \in D \, (\omega_A(x) = +) \wedge \exists x \in D \, (\omega_A(x) = -) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sup_{x \in D} \nu_A(x) = \big(\sup_{x \in {}^+D_A} \alpha_A(x)\big)^+ \big) \Big),
\end{aligned} \tag{6.12}$$

де $\sup_{x \in D} \nu_A(x)$ – верхня точна грань напрямлених рівнів належності елементів звичайної множини D відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ (дивись (6.7)); ${}^+D_A$ – клас позитивної напрямленості звичайної множини D відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ (дивись (5.33)).

Доведення. Покажемо спочатку, що напрямленість ω верхньої точної грані $\sup_{x \in D} \alpha_A(x))^{\omega}$ рівнів належності елементів довільної множини $D \subseteq X$ відповідає заданій в висновках теореми.

Згідно з означенням строгого лінійного порядку на множині напрямлених рівнів належності та теоремою 2.1 (дивись підрозділ 2.1) про нестрогий лінійний порядок всякий позитивно напрямлений рівень належності більший за будь-який негативно напрямлений. Тому верхня точна грань $\sup\limits_{x\in D} \nu_A(x)$, яка задовольняє умову (6.7), може бути негативно напрямленою, тільки якщо $\forall x\in D\ (\omega_A(x) = -)$, а в усіх інших випадках верхня точна грань буде мати позитивну напрямленість, що відповідає (6.12).

Тепер покажемо, що твердженням теореми відповідає також значення ненапрямленого рівня належності верхньої точної грані $\sup\limits_{x\in D} \nu_A(x)$.

Розглянемо множину $M_{\alpha D} = \{\alpha\in M_\alpha \mid \alpha = \alpha_A(x) \wedge x\in D\}$, яка є підмножиною дійсних чисел. Згідно з означенням строгого лінійного порядку на множині напрямлених рівнів належності та теореми 2.1 (дивись підрозділ 2.1) про нестрогий лінійний порядок лінійна упорядкованість ненапрямлених рівнів належності в множині $M_{\alpha D}$ повинна збігатись із звичайною лінійною упорядкованістю дійсних чисел за умови, що напрямленості рівнів належності всіх елементів $x\in D$ збігаються. Порівнюючи означення верхньої точної грані для множини дійсних чисел [134] із означенням (6.7), приходимо до висновку, що за цих умов значення ненапрямленого рівня належності верхньої точної грані напрямлених рівнів належності елементів множини D будуть збігатися зі звичайною верхньою точною гранню множини $M_{\alpha D}$, а це в свою чергу означає істинність перших двох імплікацій твердження (6.12).

Якщо напрямленості рівнів належності всіх елементів $x\in D$ не збігаються, то верхня точна грань $\sup\limits_{x\in D} \nu_A(x)$ згідно з означенням строгого лінійного порядку на множині напрямлених рівнів належності буде позитивно напрямлена, а значить ненапрямлений рівень належності цієї грані з тих же причин повинен збігатись із звичайною верхньою точною гранню ненапрямлених рівнів належності, взятої по класу позитивної напрямленості ${}^{+}D_A$ звичайної множини D (дивись пункт 5.5.2), тобто $\sup\limits_{x\in D} \nu_A(x) = (\sup\limits_{x\in {}^{+}D_A} \alpha_A(x))^{+}$. Але це означає, що і остання імплікація твердження (6.12) є істинною. Теорему доведено.♦

Доведена теорема 6.1 дає можливість визначати верхню точну грань напрямлених рівнів належності елементів звичайної множини D

відносно слабкої множини $\overset{\approx}{A}$, використовуючи методи визначення верхніх точних граней звичайних числових множин.

Тепер доведемо аналогічну теорему для нижньої точної грані напрямлених рівнів належності.

Теорема 6.2.

$$\forall D \subseteq X\, \forall\, \overset{\approx}{A} \subseteq \overset{\approx}{X}\, (\, (\, \forall x{\in}D\, (\omega_A(x) = +) \;\Rightarrow\; \inf_{x\in D} \nu_A(x) = \,(\, \inf_{x\in D} \alpha_A(x))^{+}\,) \;\wedge$$

$$\wedge\;(\, \forall x{\in}D\, (\omega_A(x) = -) \;\Rightarrow\; \inf_{x\in D} \nu_A(x) = \,(\, \inf_{x\in D} \alpha_A(x))^{-}\,) \;\wedge$$

$$\wedge\;(\, \exists x{\in}D\, (\omega_A(x) = +) \wedge \exists x{\in}D\, (\omega_A(x) = -) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf_{x\in D} \nu_A(x) = (\, \inf_{x\in^{-}D_A} \alpha_A(x))^{-}\,)\,), \qquad (6.13)$$

де $\inf\limits_{x\in D} \nu_A(x)$ – верхня точна грань напрямлених рівнів належності елементів звичайної множини D відносно слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ (дивись (6.8)); ${}^{-}D_A$ – клас негативної напрямленості звичайної множини D відносно слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ (дивись (5.32)).

Доведення. Покажемо спочатку, що напрямленість нижньої точної грані $\inf\limits_{x\in D} \nu_A(x)$ рівнів належності елементів довільної звичайної множини $D \subseteq X$ відповідає твердженню теореми.

Оскільки згідно із заданими в просторі напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$ строгим та нестрогим лінійними порядками всякий позитивно напрямлений рівень належності більший за будь-який негативно напрямлений, то нижня точна грань $\inf\limits_{x\in D} \nu_A(x)$, яка задовольняє умову (6.8), може бути позитивно напрямленою тоді і тільки тоді, коли

$$\forall x{\in}D\, (\omega_A(x) = +),$$

а в усіх інших випадках верхня точна грань буде мати негативну напрямленість, що відповідає висновкам теореми (6.13).

Переконаємося тепер, що твердженням теореми відповідає також значення ненапрямленого рівня належності нижньої точної грані $\inf\limits_{x\in D} \nu_A(x)$.

Розглянемо множину $M_{\alpha D} = \{\alpha \in M_{\alpha} \,|\, \alpha = \alpha_A(x) \wedge x \in D\}$, елементами якої є дійсні числа – ненапрямлені рівні належності. Згідно з означенням строгого лінійного порядку на множині напрямлених рівнів належності та теореми 2.1 про нестрогий лінійний порядок (дивись підрозділ 2.1) лінійна упорядкованість ненапрямлених рівнів належності в множині $M_{\alpha D}$ повинна збігатись із звичайною лінійною упорядкованістю дійсних чисел за умови, що напрямленості рівнів належності всіх елементів $x \in D$ збігаються. Порівнюючи означення нижньої точної грані множини дійсних чисел [134] із означенням (6.8) для множини напрямлених рівнів належності, приходимо до висновку, що за цих умов значення ненапрямленого рівня належності нижньої точної грані напрямлених рівнів належності елементів множини D будуть збігатися зі звичайною нижньою точною гранню множини $M_{\alpha D}$, а це в свою чергу означає істинність перших двох імплікацій твердження (6.13).

Якщо напрямленості рівнів належності всіх елементів $x \in D$ не збігаються, то нижня точна грань $\inf\limits_{x \in D} \nu_A(x)$ згідно з означенням строгого лінійного порядку на множині напрямлених рівнів належності буде негативно напрямлена, а значить ненапрямлений рівень належності цієї грані з тих же причин повинен збігатися із звичайною нижньою точною гранню ненапрямлених рівнів належності взятої по класу негативної напрямленості ${}^{-}D_A$ звичайної множини D (дивись пункт 5.5.2), тобто $\inf\limits_{x \in D} \nu_A(x) = (\inf\limits_{x \in {}^{-}D_A} \alpha_A(x))^{-}$, що доводить істинність останньої третьої імплікації твердження (6.13). Теорему доведено.♦

Оскільки для будь-якого відображення $\mathrm{f} : X \to Y$ і для будь-якого елемента $y \in \mathrm{f}(X)$ його прообраз $\mathrm{f}^{-1}(y)$ є деякою підмножиною області визначення X, то доведені для таких підмножин теорема 6.1 та теорема 6.2 дають можливість виконувати практичні розрахунки значень функції рівнів образа будь-якої слабкої множини в X, використовуючи відомі методи визначення верхніх точних граней та зокрема мінімальних та максимальних елементів звичайних числових множин, а також методи мінімізації та максимізації звичайних скалярних функцій.

6.4 Приклади використання принципу узагальнення для слабких множин

В цьому підрозділі розглянемо приклади визначення образів слабких множин при звичайних відображеннях, а також приклад інтерпретації функції напрямлених рівнів належності слабкої множини в процесі моделювання невизначеного навантаження вузла електромережі.

Розглянемо простий приклад пошуку образу скінченної слабкої множини при звичайному відображенні f.

Нехай на $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ задана слабка множина

$$\overset{\approx}{A} = -3|0{,}2^{-} + -2|0{,}9^{-} + -1|0{,}3^{+} + 0|0{,}5^{+} + 1|0{,}6^{+} + 2|0{,}7^{+} + 3|0{,}8^{+},$$

а також функція f така, що $\forall x \in X(\mathrm{f}(x) = x^2)$. Очевидно областю значень цієї функції є множина $\{0; 1; 4; 9\}$.

Знайдемо образ слабкої множини $\overset{\approx}{A}$ при відображенні f в $\mathrm{Im\,f}$. Для цього випишемо слабкі образи кожного елемента області означення функції f з урахуванням напрямлених рівнів належності цих елементів слабкій множині $\overset{\approx}{A}$:

$$\mathrm{f}(-3;\ 0,\ 2^{-}) = (9;\ 0{,}2^{-});$$

$$\mathrm{f}(-2;\ 9^{-}) = (4;\ 0{,}9^{-});$$

$$\mathrm{f}(-1;\ 0{,}3^{+}) = (1;\ 0{,}3^{+});$$

$$\mathrm{f}(0;\ 0{,}5^{+}) = (0;\ 0{,}5^{+});$$

$$\mathrm{f}(1;\ 0{,}6^{+}) = (1;\ 0{,}6^{+});$$

$$\mathrm{f}(2;\ 0{,}7^{+}) = (4;\ 0{,}7^{+});$$

$$\mathrm{f}(3;\ 0{,}8^{+}) = (9;\ 0{,}8^{+}).$$

Як бачимо прообрази кожного із елементів 1, 4, 9 області значень функції f утримують по два елементи із області визначення функції f з різними напрямленими рівнями належності по відношенню до слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$. Знайдемо для них верхні точні грані напрямлених рівнів належності, які в цьому випадку дорівнюють максимальним їх значенням. Для цього використаємо введений принцип узагальнення та теореми 6.1, 6.2:

$$\nu_{\mathrm{f}(A)}(1) = \sup_{x \in \mathrm{f}^{-1}(1)} \nu_A(x) = \max(0{,}3^{+}; 0{,}6^{+}) = 0{,}6^{+};$$

$$\nu_{\mathrm{f}(A)}(4) = \sup_{x \in \mathrm{f}^{-1}(4)} \nu_A(x) = \max(0{,}9^{-}; 0{,}7^{+}) = 0{,}7^{+};$$

$$\nu_{\mathrm{f}(A)}(9) = \sup_{x \in \mathrm{f}^{-1}(9)} \nu_A(x) = \max(0{,}2^{-}; 0{,}8^{+}) = 0{,}8^{+}.$$

Що стосується елемента 0 із області значень функції f, то його прообраз складається тільки із одного елемента $\mathrm{f}^{-1}(0) = \{0\}$ з напрямленим рівнем належності $0{,}5^{+}$. Тому саме цей напрямлений рівень належності передається йому відображенням f і залишається у нього остаточно.

В результаті отримаємо такий образ слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ в $\mathrm{Im\,f}$:

$$\mathrm{f}(\tilde{\tilde{A}}) = 0|0{,}5^{+} + 1|0{,}6^{+} + 4|0{,}7^{+} + 9|8^{+}.$$

Звернемо увагу на одну особливість наведеного прикладу.

Якщо функцію f задати, як функцію із X в X і всі слабкі множини та їх образи розглядати в X, то згідно з (6.9)

$$\forall x \in X \setminus \mathrm{Im\,f}(\nu_{\mathrm{f}(A)}(x) = 0^{-}).$$

Тепер розглянемо приклад визначення образу нескінченої слабкої множини при звичайному відображенні f: R → R. В цьому прикладі нескінчена слабка множина буде моделювати невизначену потужність вузла електромережі в умовах невідомого числового та нечіткого значення цієї потужності. За відомим слабким значенням потужності вузла електромережі необхідно буде знайти слабке значення струму, який споживається в цьому вузлі.

Нехай точне значення S повної потужності вузла трифазної електромережі напругою U = 10 кВ невідомо. Слабкий опис невизначеного значення повної потужності S задано з допомогою слабкої множини $\widetilde{\widetilde{S}}$, зображеної в напрямлених та звичайних декартових осях координат на рис. 6.1. На цьому рисунку в декартових осях штриховкою показана також зона нечітких реалізацій слабкої множини $\widetilde{\widetilde{S}}$.

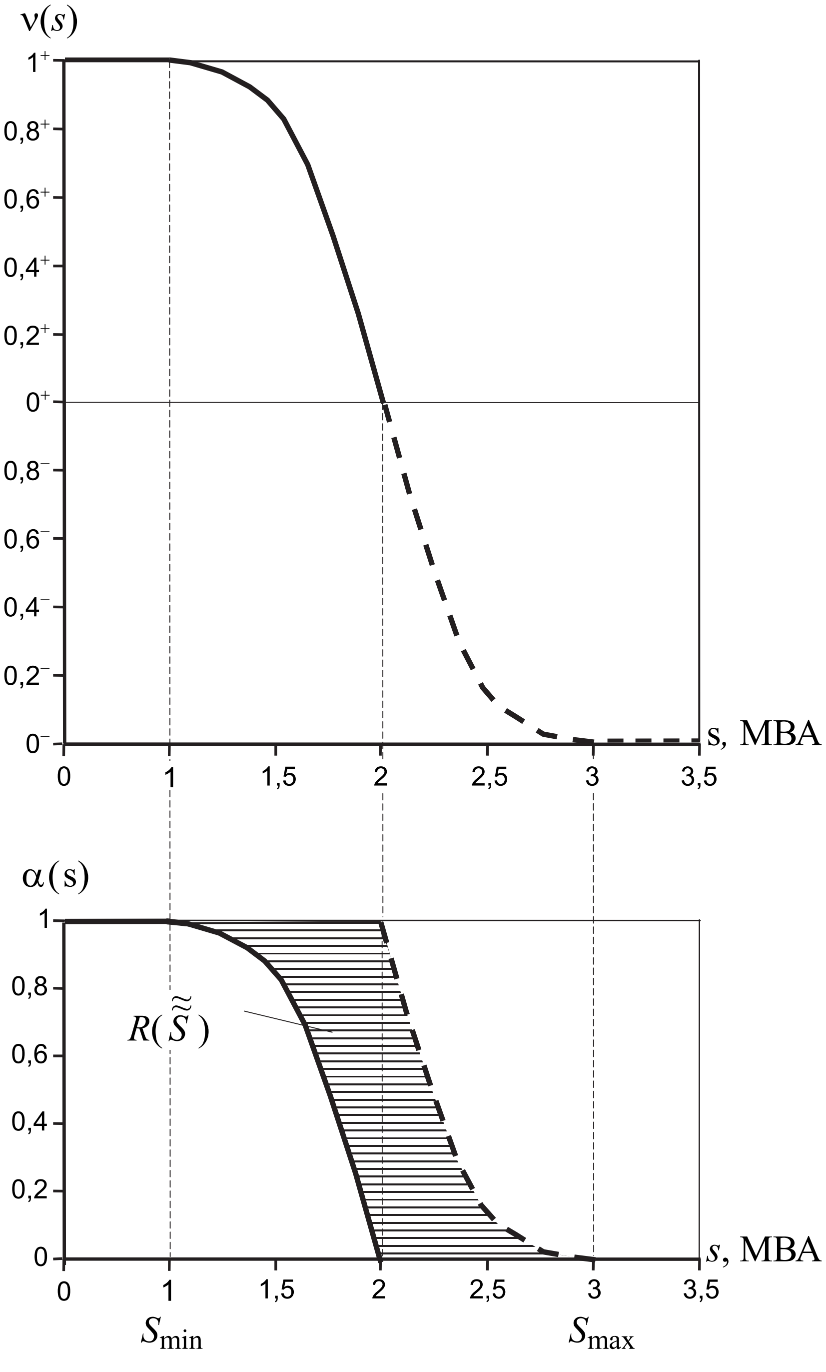


Рисунок 6.1 – Слабко задана повна потужність вузла електромережі в напрямлених та декартових осях координат

Інтерпретація функції належності слабко заданої потужності вузла електромережі дана авторами в роботах [16–18, 20]. Згідно з цією інтерпретацією позитивно напрямлений рівень належності $\alpha_S(s)^+$ слабкій множині $\approx{S}$ задає нижню точну грань рівня впевненості в тому, що можливе значення s невизначеної потужності не перевищує його точне значення. При цьому верхня точна грань впевненості в тому, що $s \le S$ ніяк не обмежується і може досягати граничного значення 100 %, що відповідає напрямленому рівню належності 1^+.

Що стосується негативно напрямленого рівня належності $\alpha_S(s)^-$, то він задає верхню точну грань рівня впевненості в тому, що $s \le S$. При цьому нижня точна грань впевненості в тому, що $s \le S$ ніяк не обмежується і може досягати граничного значення 0 %, що відповідає напрямленому рівню належності 0^-.

За такої інтерпретації напрямлених рівнів належності слабкої множини $\overset{\approx}{S}$ зображені на рисунку граничні значення потужності $S_{\min}$ та $S_{\max}$ мають прозорий фізичний зміст. Для всіх можливих значень потужності таких, що $s \le S_{\min}$ навіть нижня точна грань впевненості в тому, що $s \le S$ дорівнює 100 %. Тобто для всіх таких можливих значень потужності існує абсолютна впевненість в тому, що вони не перевищують невідоме точне значення потужності в вузлі електромережі.

Граничне значення потужності $S_{\max}$, зображене на рис. 6.1, має протилежний зміст. Для всіх можливих значень потужності, які є не меншими за $S_{\max}$, навіть верхня точна грань впевненості в тому, що $s \le S$ дорівнює 0 %. Тобто для всіх таких можливих значень потужності, що $s > S_{\max}$ існує абсолютна впевненість в тому, що вони перевищують невідоме точне значення потужності в вузлі електромережі.

В [8] показано, що функція напрямлених рівнів належності слабкої множини $\overset{\approx}{S}$ має вигляд

$$\nu N_S(s) = \begin{cases} 1^+ \Leftrightarrow s \le S_{\min}; \\ (1 - 2 \cdot N(s, a_s, \sigma_s))^+ \Leftrightarrow S_{\min} < s \le a_s; \\ (2 - 2 \cdot N(s, a_s, \sigma_s))^- \Leftrightarrow a_s < s < S_{\max}; \\ 0^- \Leftrightarrow s \ge S_{\max}, \end{cases} \tag{6.14}$$

де $S_{\min}$, $S_{\max}$ – описані вище параметри, значення яких отримують на основі експертних процедур; a_s, σ_s – допоміжні параметри функції напрямлених рівнів належності νN_S, які визначаються за формулами

$$a_s = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2}; \; \sigma_s = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{6},$$

$N(s, a_s, \sigma_s)$ – стандартна функція Гаусса, в якості параметрів якої використовуються величини a_s та σ_s.

Остання функція має вигляд

$$N(s, a_s, \sigma_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_s} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t - a_s)^2}{2\sigma_s^2} \right) dt.$$

Використовуючи слабке значення потужності в вузлі мережі $\tilde{\tilde{S}}$, необхідно знайти відповідне йому слабке значення струму $\tilde{\tilde{I}}$ в цьому вузлі.

Струм i, який відповідає потужності s вузла електромережі, можна знайти за допомогою функції $I(s)$ за формулою

$$i = I(s) = \frac{s}{\sqrt{3} \cdot U} \cdot 10^3, \tag{6.15}$$

де s – повна потужність вузла, МВА; U – напруга вузла, кВ.

Таким чином, задача полягає у визначенні слабкого образу $I(\tilde{\tilde{S}})$ слабкої множини потужності $\tilde{\tilde{S}}$ при відображенні I. Для цього, базуючись на функціональному зв'язку (6.15), виразимо функцію напрямлених рівнів належності слабкої множини струму $\tilde{\tilde{I}}$ через відому функцію напрямлених рівнів належності слабкої множини повної потужності $\tilde{\tilde{S}}$, використовуючи принцип узагальнення для слабких множин. Оскільки функція (6.15) є бієкцією, то з цією метою можна використати найпростіший випадок принципу узагальнення (6.11), який в цьому випадку буде мати вигляд

$$\forall i \in \mathrm{R}_{+0}(\nu_I(i) = \nu \mathrm{N}_S(\mathrm{I}^{-1}(i)). \qquad (6.16)$$

Права частина рівності (6.16) виражена через прообраз змінної i при відображенні I. Виразимо (6.16) через змінну i в явному вигляді.

Оскільки функціональний зв'язок (6.15) є бієктивним, то існує зворотна функція, яка задає залежність s від i. Зворотну функцію знайдемо із (6.15):

$$s = \mathrm{I}^{-1}(i) = \sqrt{3} \cdot U \cdot i \cdot 10^{-3}. \qquad (6.17)$$

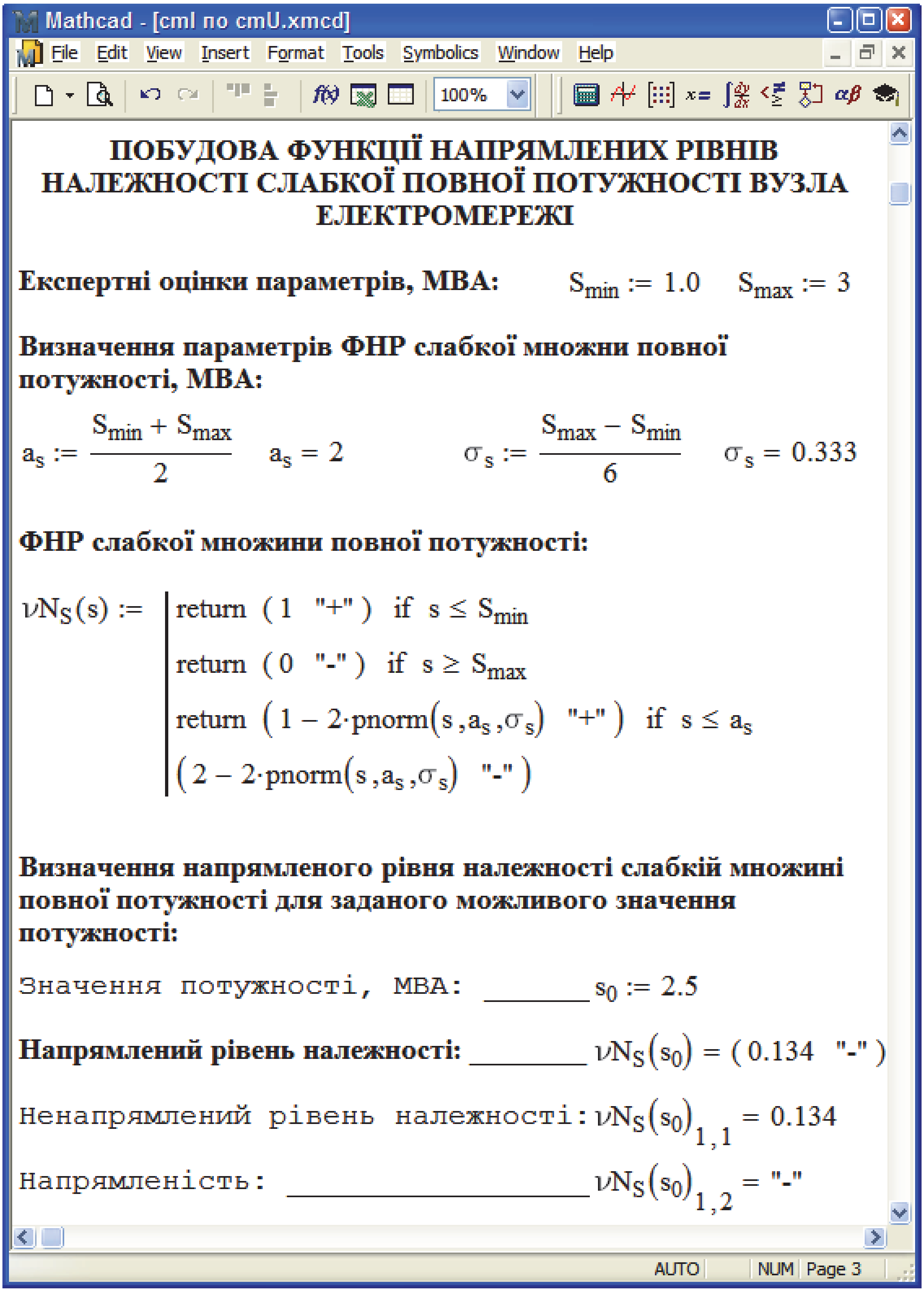
Підставляючи в (6.16) замість $\mathrm{I}^{-1}(i)$ праву частину рівності (6.17), отримаємо:

$$\forall i \in \mathrm{R}_{+0}(\nu_I(i) = \nu \mathrm{N}_S(\sqrt{3} \cdot U \cdot i \cdot 10^{-3}).$$

Таким чином, для того, щоб отримати функцію напрямлених рівнів належності слабкого струму вузла електромережі необхідно і достатньо підставити вираз $\sqrt{3} \cdot U \cdot i \cdot 10^{-3}$ в функцію напрямлених рівнів належності слабкої потужності (6.14) замість аргументу s.

Використовуючи отримані результати, виконаємо побудову функцій напрямлених рівнів належності (ФНР) слабких множин потужності та струму, а також їх графіків ненапрямлених рівнів належності в декартових осях координат з допомогою математичного САПР MathCad.

На рис. 6.2 показано фрагмент робочого листа Mathcad, на якому будується функція напрямлених рівнів належності повної слабкої множини потужності вузла електромережі на основі експертних оцінок параметрів $S_{\min}$, $S_{\max}$ та виконується розрахунок напрямлених рівнів належності для заданого можливого значення потужності s_0 цього вузла.



ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ НАПРЯМЛЕНИХ РІВНІВ НАЛЕЖНОСТІ СЛАБКОЇ ПОВНОЇ ПОТУЖНОСТІ ВУЗЛА ЕЛЕКТРОМЕРЕЖІ

Експертні оцінки параметрів, МВА: $S_{min} := 1.0$ $S_{max} := 3$

Визначення параметрів ФНР слабкої множни повної потужності, МВА:

$$a_s := \frac{S_{min} + S_{max}}{2} \qquad a_s = 2 \qquad \sigma_s := \frac{S_{max} - S_{min}}{6} \qquad \sigma_s = 0.333$$

ФНР слабкої множини повної потужності:

$$\nu N_S(s) := \left| \begin{array}{l} \text{return } (1 \ \ \text{"+"}) \text{ if } s \le S_{min} \\ \text{return } (0 \ \ \text{"-"}) \text{ if } s \ge S_{max} \\ \text{return } \left(1 - 2 \cdot \text{pnorm}\left(s, a_s, \sigma_s\right) \ \ \text{"+"}\right) \text{ if } s \le a_s \\ \left(2 - 2 \cdot \text{pnorm}\left(s, a_s, \sigma_s\right) \ \ \text{"-"}\right) \end{array} \right.$$

Визначення напрямленого рівня належності слабкій множині повної потужності для заданого можливого значення потужності:

Значення потужності, МВА: ______ $s_0 := 2.5$

Напрямлений рівень належності: ______ $\nu N_S(s_0) = (0.134 \ \ \text{"-"})$

Ненапрямлений рівень належності: $\nu N_S(s_0)_{1,1} = 0.134$

Напрямленість: ______________ $\nu N_S(s_0)_{1,2} = \text{"-"}$

Рисунок 6.2 – Побудова ФНР слабкої множини потужності та визначення напрямлених рівнів належності до цієї множини в середовищі САПР MathCad

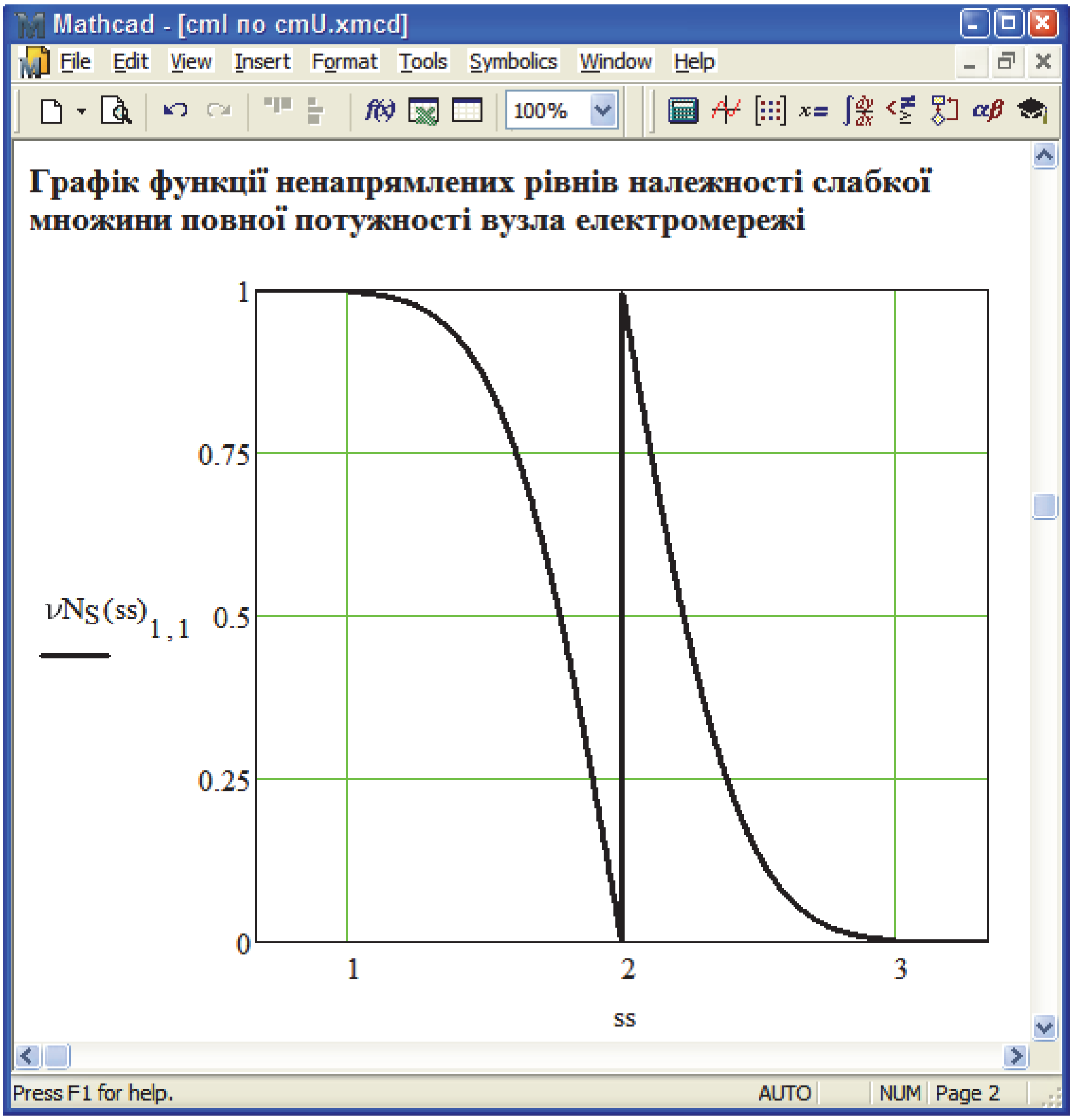
Для автоматичного виконання розрахунків за допомогою комп'ютерної моделі, показаної на рис. 6.2, на робочому листі Mathcad необхідно і достатньо задати лише значення параметрів $S_{\min}$, $S_{\max}$ та s_0.

Відносно показаної на рис. 6.2 комп'ютерної моделі цікаво відмітити таке. Незважаючи на те, що з очевидних причин робота з напрямленими рівнями належності на цей час не могла бути реалізована ні в одному із існуючих математичних програмних САПР, авторам вдалося досить легко реалізувати розрахунок напрямлених рівнів належності в координатному вигляді, використовуючи лише стандартні формульні та програмні блоки MathCad. Однак «заставити» MathCad побудувати графіки відповідних функцій в напрямлених осях не вдалося.

Це і зрозуміло – існуючі на цей час математичні програми побудови графіків в декартових та інших стандартних осях не можуть бути використані для випадку напрямлених осей координат, які відрізняються способом упорядкування негативно напрямлених рівнів належності від звичайного способу упорядкування дійсних чисел.

З цієї причини з допомогою стандартних засобів MathCad, як і інших математичних САПР, можна реалізувати побудову лише графіків ненапрямлених рівнів належності слабких множин в декартових осях координат. Саме такий графік повної слабкої множини потужності вузла електромережі, який був побудований на робочому листі MathCad, показано на рис. 6.3.

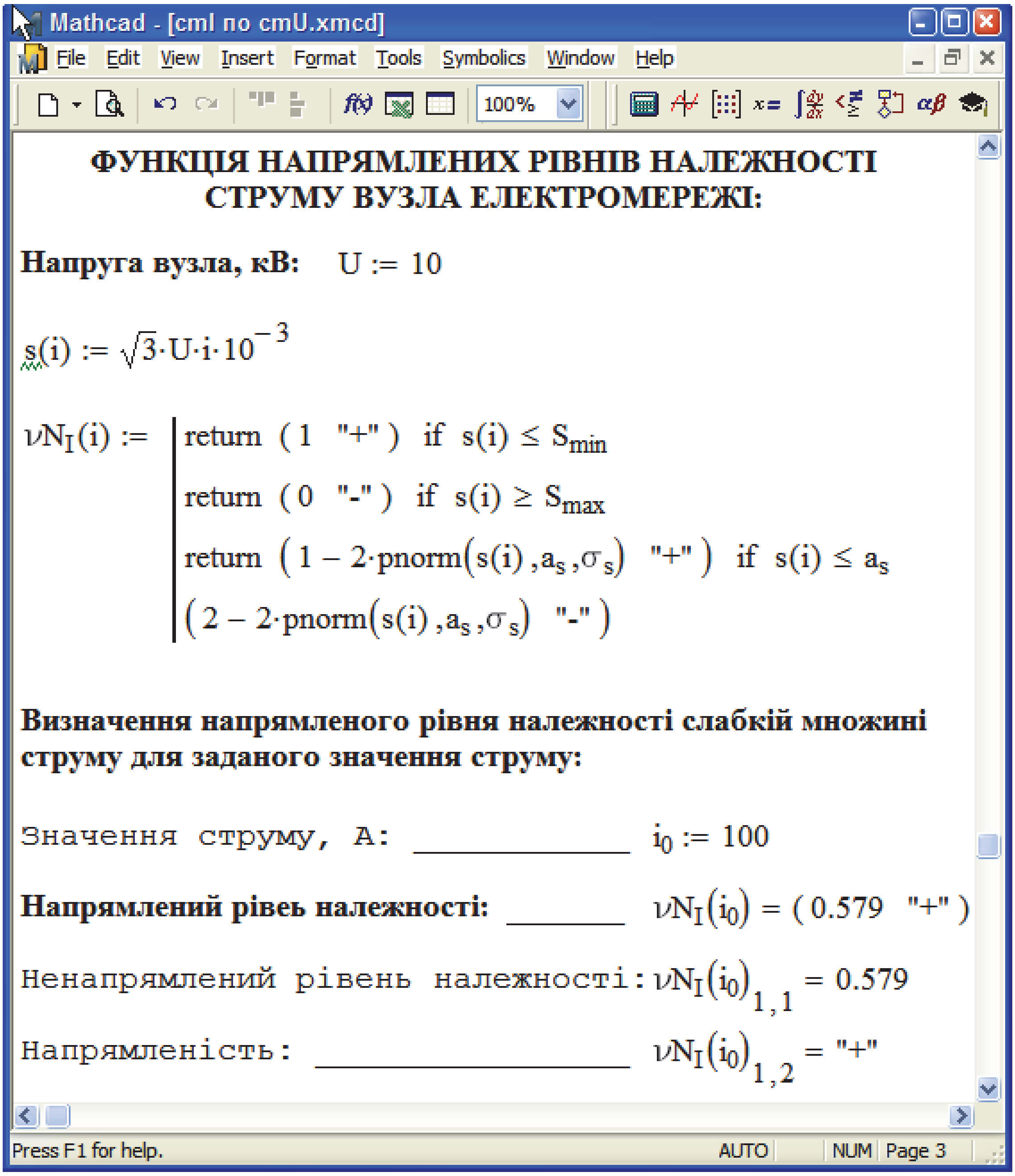
Як легко зрозуміти, ліва частина графіка на рис. 6.3, яка розташована до точки розриву, зображає позитивно напрямлені рівні належності, а права частина цього графіка (розташована після точки розриву) зображає негативно напрямлені рівні належності.



Графік функції ненапрямлених рівнів належності слабкої множини повної потужності вузла електромережі

Рисунок 6.3 – Графік функції напрямлених рівнів належності слабкої множини потужності, побудований на робочому листі MathCad

На рис. 6.4 показано фрагмент робочого листа Mathcad, на якому будується функція напрямлених рівнів належності образу I($\tilde{\tilde{S}}$) слабкої множини потужності $\tilde{\tilde{S}}$ при відображенні I шляхом підстановки в функцію напрямлених рівнів належності слабкої множини потужності νN_S виразу $\sqrt{3}\cdot U\cdot i\cdot 10^{-3}$ замість аргументу s цієї функції. Після цього виконується розрахунок напрямленого рівня належності заданого можливого значення струму i_0 по відношенню до слабкої множини $\tilde{\tilde{I}}$ = I($\tilde{\tilde{S}}$).



ФУНКЦІЯ НАПРЯМЛЕНИХ РІВНІВ НАЛЕЖНОСТІ СТРУМУ ВУЗЛА ЕЛЕКТРОМЕРЕЖІ:

Напруга вузла, кВ: $U := 10$

$s(i) := \sqrt{3}\cdot U\cdot i\cdot 10^{-3}$

$$\nu N_I(i) := \left| \begin{array}{l} \text{return } (1 \ \ \text{"+"}) \text{ if } s(i) \le S_{min} \\ \text{return } (0 \ \ \text{"-"}) \text{ if } s(i) \ge S_{max} \\ \text{return } \left(1 - 2\cdot \text{pnorm}\left(s(i), a_s, \sigma_s\right) \ \ \text{"+"}\right) \text{ if } s(i) \le a_s \\ \left(2 - 2\cdot \text{pnorm}\left(s(i), a_s, \sigma_s\right) \ \ \text{"-"}\right) \end{array} \right.$$

Визначення напрямленого рівня належності слабкій множині струму для заданого значення струму:

Значення струму, А: ______________ $i_0 := 100$

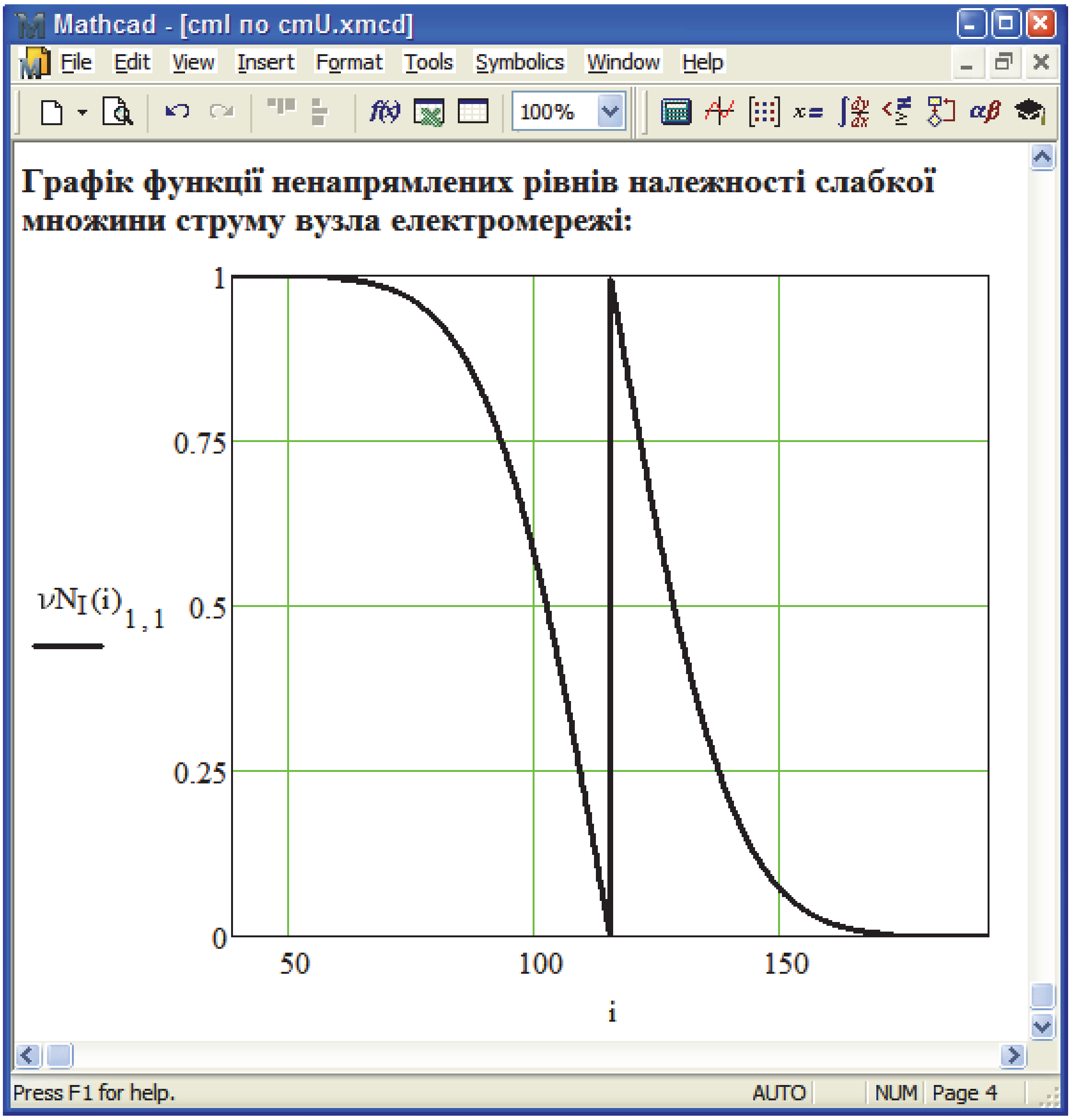
Напрямлений рівеь належності: _______ $\nu N_I(i_0) = (0.579 \ \ \text{"+"})$

Ненапрямлений рівень належності: $\nu N_I(i_0)_{1,1} = 0.579$

Напрямленість: ____________________ $\nu N_I(i_0)_{1,2} = \text{"+"}$

Рисунок 6.4 – Побудова ФНР слабкої множини струму та визначення напрямлених рівнів належності до цієї множини в середовищі САПР MathCad

На рис. 6.5 показано побудований на робочому листі Mathcad графік напрямлених рівнів належності знайденої слабкої множини струму.



Графік функції ненапрямлених рівнів належності слабкої множини струму вузла електромережі:

Рисунок 6.5 – Графік функції напрямлених рівнів належності слабкої множини струму, побудований на робочому листі MathCad

ВИСНОВКИ

Введені в цій монографії поняття та доведені тут теореми створюють теоретичну базу нової теорії слабких множин, яка, на думку авторів, здатна буде узагальнити існуючі теорії звичайних (канторових) та нечітких множин і тому може здобути важливе теоретичне значення.

Прикладні аспекти створюваної теорії автори в першу чергу пов'язують із потребою в більш універсальних та потужних засобах моделювання складних систем в умовах невизначеності даних.

Нова теорія, як показує досвід її використання авторами, дає можливість реалізувати новий, так званий *слабкий підхід* до моделювання невизначених параметрів складних систем в умовах, коли не задані не тільки чіткі, але й навіть нечіткі або лінгвістичні значення цих параметрів. Отже, слабкі описи невизначених параметрів повинні передувати їх нечітким та однозначним числовим описам. Формально це означає, що слабкі математичні структури повинні з'являтися в універсумі можливих значень невизначеного параметра задовго до появи в ньому нечітких та детермінованих математичних об'єктів, які описують ці параметри.

Слабкі описи невизначених параметрів допомагають простіше та точніше визначати нечіткі та детерміновані їх значення, а якщо це з тих чи інших причин неможливо зробити, то можуть замінити їх в процесі остаточного прийняття рішень. Звідси випливає важливе практичне значення нової теорії.

В цій роботі розглянуті лише основні формально математичні поняття нової теорії, досліджені їх основні властивості та зв'язки з аналогічними поняттями теорій звичайних та нечітких множин. Введені та досліджені нові поняття, які не мають аналогів в існуючих теоріях множин. Серед них такі поняття, як напрямленість, яка є основною властивістю рівнів належності слабкій множині, функція напрямлених рівнів належності слабкої множини, нечіткі та звичайні реалізації слабких множин, які дозволяють виявити сутність зв'язку між слабкими, звичайними та нечіткими множинами, напрямлені осі координат, які дозволяють отримати зручне для аналізу геометричне зображення слабкої множини та інші.

Введена метрика в просторі напрямлених рівнів належності слабких множин, яка дозволяє задавати відстані між точками цього простору, відрізняти неперервні та розривні, спадні та зростаючі слабкі множини, вводити інші метричні властивості слабких множин.

Означені та досліджені основні відношення рівності та включення слабких множин. Показано, що їх властивості відповідають аналогічним властивостям звичайних та нечітких множин.

Детально досліджено зв'язок між слабкими, нечіткими та звичайними множинами. Показано, що слабкі множини на відміну від нечітких не можуть безпосередньо переходити в звичайні та нечіткі множини, але можуть несуперечливо реалізуватися у вигляді таких множин. Розкрито формальний та прикладний зміст поняття нечіткої та звичайної реалізації слабкої множини.

Розглянуті скалярні функції слабкого аргументу, введено принцип узагальнення для слабких множин, наведені приклади його використання.

Багато питань теорії слабких множин залишилося за межами цієї роботи. Зокрема не розглядались алгебра слабких множин, принципи переходу від слабких до нечітких та звичайних множин і навпаки, методи побудови функцій рівнів слабких множин, загальні підходи до слабкого опису невизначених параметрів складних систем в умовах невизначеності їх значень та багато інших.

Найголовніші із перелічених питань автори планують висвітлити в наступних своїх роботах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Нариньяни А. С. Недоопределённость в системе представления и обработки знаний / А. С. Нариньяни // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 3–28.
2. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций / Ю. Б. Гермейер. – М. : Наука, 1971. – 384 с.
3. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. Теория принятия решений при неполном единстве / Ю. Б. Гермейер. – М. : Изд. МГУ. – 1972. – 186 с.
4. Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр / Дж. фон. Нейман // Матричные игры. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 121–137.
5. Демянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс / В. Ф. Демянов, В. Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
6. Федоров В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 380 с.
7. Танака К. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве / К. Танака // Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения : Пер. с англ. / [под ред. Р. Р. Ягера]. – М. : Радио и связь, 1986. – 408 с.
8. Камінський Вячеслав Вікторович. Математичні моделі квазідетермінізації процесів в складних системах : дис. … канд. техн. наук: 06.10.06 / Камінський Вячеслав Вікторович. – Вінниця, 2006. – 234 с.
9. Мокін Б. І. Нетрадиційні операції та принципи узагальнення в теорії нечітких множин (основні ідеї та перспективи застосування в прикладних задачах) / Мокін Б. І. Камінський В. В., Кацив С. Ш. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2000. – № 5. – С. 83–88.
10. Мокін Б. І. Властивості слабких операцій в теорії нечітких множин / Мокін Б. І., Камінський В. В., Кацив С. Ш. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. – № 5. – С. 106–113.

11. Мокін Б. І. Нетрадиційні операції та принципи узагальнення теорії нечітких множин в задачах квазідетермінізації процесів в складних системах / Мокін Б. І., Камінський В. В., Кацив С. Ш. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. – № 6. – С. 173–175.

12. Мокін Б. І. Математичне моделювання процесів пошуку оптимальних рішень з використанням нечітких слабко заданих вхідних параметрів та їх граничних значень / Мокін Б. І. Камінський В. В. // Контроль і управління в складних системах (КУСС–2003) : VII міжнар. наук.-техн. конф, 8–11 жовтня 2003 р. : тези доп. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – С. 14.

13. Мокін Б. І. Математичне моделювання процесів пошуку оптимальних рішень з використанням слабко заданих вхідних параметрів / Мокін Б. І., Камінський В. В. // Книга за матеріалами VII міжнародної науково–технічної конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС – 2003)» : доповіді / Мокін Б. І., Камінський В. В. – м. Вінниця, 8–11 жовтня 2003 року. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – С. 7–10.

14. Мокін Б. І. Слабкі множини та їх застосування до розв’язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності даних / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Віницького політехнічного інституту. – 2004. – № 3. – С. 102–108.

15. Мокин Б. И. Основы теории слабых множеств и её прикладные аспекты / Б. И. Мокин, В. В. Каминский // Автоматика 2005 : 12-я междунар. науч.-техн. конф., 30.05 – 03.06 2005 г. : тезисы докл. Т1. – Харьков, 2005. – С. 22–23.

16. Мокін Б. І. Математичне моделювання невизначених параметрів режиму електромереж з допомогою слабких множин / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Контроль і управління в складних системах

(КУСС–2005) : VIII міжнар. наук.-техн. конф, 24–27 жовтня 2005 р. : тези доп. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – С. 171.

17. Мокін Б. І. Математичне моделювання невизначених параметрів режиму електромереж з допомогою слабких множин / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Віницького політехнічного інституту. – 2005. – № 6. – С. 89 – 96.

18. Мокін Б. І. Слабкі множини як альтернатива використанню нечітких множин у моделюванні складних систем / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Автоматика 2006 : 13-а міжнар. наук.-техн. конф, 25–28 вересня 2006 р. : тези доп. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. – С. 8.

19. Мокін Б. І. Геометрична інтерпретація слабких множин та їх систем нечітких реалізацій / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 4. – С. 34 – 47.

20. Мокін Б. І. Слабкі множини як альтернатива нечітким множинам в моделюванні невизначених параметрів складних систем / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 6. – С. 226–230.

21. Мокін Б. І. Метрика в просторі напрямлених рівнів належності слабко заданих параметрів складних систем / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Контроль і управління в складних системах (КУСС–2008) : IX міжнар. наук.-техн. конф, 24–25 жовтня 2005 р. : тези доп. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – С. 1.

22. Мокін Б. І. Метрика в просторі напрямлених рівнів належності слабко заданих параметрів складних систем [Електронний ресурс] / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Наукові праці ВНТУ. – 2009. – № 2. – 6 с.: Режим доступу до журналу – http://www.nbuv.gov.ua/e–journals/VNTU/2009–2/2009–2.files/uk/09bimocs_ua.pdf.

23. Мокін Б. І. Загальні принципи створення методів побудови функцій рівнів слабких множин навантаження у вузлах електропостачаль-

них систем [Електронний ресурс] / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Наукові праці ВНТУ. – 2011. – № 1. – 6 с.: Режим доступу до журналу – http://www.nbuv.gov.ua/e–journals/VNTU/2011_1/2011–1.files/uk/ 11bimpss_ ua.pdf.

24. Casti J. Dynamical Systems and Their Applications: Linear Theory / J. Casti. – Academic Press, New York. – 1977.

25. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1975. – 526 с.

26. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А. Г. Ивахненко. – К. : Наукова думка, 1981. – 296 с.

27. Шрейдер Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.

28. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М. : Мир, 1971. – 400 с.

29. Бусленко Н. П. Лекции по теории сложных систем / Н. П. Бусленко, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко. – М. : Советское радио, 1973. – 440 с.

30. Gigch John P van. Applied general systems theory. Second edition / Gigch John P van. – New York, Hagerstown, San Francisco, London : Harper & Row, Publishers, 1978, 731 p.

31. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев – М. : Наука, 1981, – 488 с.

32. Дружинин В. В. Системотехника / В. В. Дружинин, Д. С. Конторов. – М. : Радио и связь, 1985. – 200 с.

33. Дружинин В. В. Введение в теорию конфликта / В. В. Дружинин, Д. С. Конторов, М. Д. Конторов. – М. : Радио и связь, 1989. – 288 с.

34. Сейдж Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт ; пер. с англ. ; [под ред. Б. Р. Левина]. – М. : Радио и связь, 1982. – 392 с.

35. Николаев В. Н. Системотехника: методы и приложения / В. Н. Николаев, В. М. Брук. – Л. : Машиностроение, 1985. – 199 с.

36. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы: пер. с англ / Дж. Касти. – М. : Мир, 1982. – 216 с., ил.

37. Теория систем. Математические методы и моделирование. Т44: Сборник статей : пер. с англ. ; [под ред. А. Н. Колмогорова, С. П. Новикова]. – М. : Мир, 1989. – 384 с.

38. Бутковский А. Г. Кибернетика и структуры / А. Г. Бутковский // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 1–2. – С. 8–20.

39. Дружинин В. В. Проблемы системологии (проблемы теории сложных систем) / В. В. Дружинин, Д. С. Конторов. – М. : Советское радио, 1976. – 296 с.

40. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

41. Sage A. P. System Identification / A. P. Sage, J. L. Melsa. – N. Y. : Academic Press, 1971. – 302 p.

42. Идентификация динамических систем / [Арбачаускене Н., Балтрунас И., Немура А., и др.]. – Вильнюс : Минитис, 1974. – 294 с.

43. Гроп Д. Методы идентификации систем : пер. с англ. / Д. Гроп. – М. : Мир, 1976. – 302 с.

44. Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов / А. М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 272 с.

45. Современные методы идентификации систем / [Под ред. П. Эйкхоффа]. – М. : Мир, 1983. – 400 с.

46. Ljung L. System identification: Theory for The user / L. Ljung. – Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1991. – 435 p.

47. Сильвестров А. Н. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов / А. Н. Сильвестров // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 6. – С. 54-65.

48. Розен В. В. Цель - оптимальность - решение (математические модели принятия оптимальных решений) / В. В. Розен. – М. : Радио и связь, 1982. – 168 с.

49. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – М. : Наука, 1982. – 432 с.

50. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука 1983. – 384 с.

51. Муртаф Б. Современное линейное программирование : пер. с англ. / Б. Муртаф. – М. : Мир, 1984, – 224 с.

52. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа : пер. с англ. / Д. Бертсекас. – М. : Радио и связь, 1987. – 400 с.

53. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы : пер. с англ. / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982. – 583 с.

54. Теория выбора и принятия решений / [И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. В. Соколов]. – М. : Наука, 1982. – 328 с.

55. Подиновский В. В. Парето - оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

56. Хоменюк В. В. Элементы теории многоцелевой оптимизации / В. В. Хоменюк. – М. : Наука, 1983. – 125 с.

57. Дубов Ю. А. Многокритериальные задачи формирования и выбора вариантов систем / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. Н. Якимец. – М. : Наука, 1986. – 296 с.

58. Банди Б. Методы оптимизации: пер. с англ. / Б. Банди – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.

59. Шоломов Л. А. Логические основы исследования дискретных моделей выбора / Л. А. Шоломов – М. : Наука, 1989. – 288 с.

60. Айзерман М. А. Выбор вариантов. Основы теории / М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров. – М. : Наука, 1990. – 240 с.

61. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель – М. : Советское радио, 1972. – 552 с.

62. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин – М. : Советское радио, 1974. – 400 с.

63. Вагнер Г. Основы исследования операций : в 3-х томах : пер. с англ. / Г. Вагнер – М. : Мир, 1973. – Т. 3. – 504 с.

64. Баранов В. В. Рекуррентные методы оптимальных решений в стохастических системах / В. В. Баранов – Харьков : Вища школа, 1981. – 145 с.

65. Бертсекас Д. Стохастическое оптимальное управление : пер. с англ. / Д. Бертсекас, С. Шрив – М. : Наука, 1985. – 280 с.

66. Семесенко М. П. Случайные процессы в системах управления / М. П. Семесенко – К., Донецк : Вища школа, 1986. – 192 с.

67. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев – М. : Наука, 1981, 258 с.

68. Теория прогнозирования и принятия решений / [Саркисян С. А., Каспин В. И., Лисичкин В. А.и др.] ; под. ред. Саркисяна С. А. – М. : Высшая школа, 1977. – 351 с.

69. Канторович Л. В. Оптимальные решения в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстко. – М. : Наука, 1972. – 231 с.

70. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование : пер. с англ. / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

71. Исследование операций. В 2-х томах. : Модели и применения : пер. с англ. / [Под ред. Дж. Моулера, С. Элмаграби.] – М. : Мир, 1981. Т. 2. – 677 с.

72. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х томах : пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М. : Мир, 1986. – Т. 1. – 352 с.

73. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х томах : пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М. : Мир, 1986. – Т. 2. – 320 с.

74. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1988. – 480 с.

75. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1991. – 386 с.

76. Петров Е. Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах / Е. Г. Петров, М. В. Новожилова, І. В. Гребеннік. – К. : Техніка, 2004. – 256 с.

77. Кантор Георг. Труды по теории множеств / Георг Кантор ; [изд. подг. А. Н. Колмогоров, Ф. А. Медведев, А. П. Юшкевич ; отв. ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич] – М. : Наука, 1985. – 431 с.

78. Н. Бурбаки. Основные структуры анализа. Ч. 1. Теория множеств. Кн. 1 : перевод с франц. Г. Н. Поварова, Ю. А. Шихановича / Н. Бурбаки [под. ред. В. А. Успенского]. – М. : Мир, 1965. – 468 с.

79. Куратовский К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский [пер. с англ. М. И. Кратко] ; [под ред. А. Д. Тайманова]. – М. : Мир, 1970. – 417 с.

80. Zadeh L. Fuzzy sets / L. Zadeh // Information and control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

81. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 258 с.

82. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

83. Пономарьов О. С. Нечеткие множества в задачах автоматизирванного управления и принятия решений / О. С. Пономарьов. – Харків : НТУ «ХПІ», 2005. –232 с.

84. Прикладные нечеткие системы / [Асаи К., Ватада Д., Иван С. и др.] ; под. ред. Т. Терано, К. Асаи, М. Сугено ; [пер. с япон.] – М. : Мир, 1993. – 368 с.

85. Бочарников В. П. Fuzzy–технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике / В. П. Бочарников. – СПб. : Наука РАН, 2001. – 328 с.

86. А. Н. Павлов. Принятие решений в условиях нечеткой информации / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов. – СПб., 2006. –72 с.

87. Круглов В. В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети / В. В. Круглов, М. И. Дли, Р. Ю. Голунов. – М. : Изд. физ.-мат. литературы , 2001. – 224 с.

88. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1974. – 127 с.

89. Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989. – 640 с.

90. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей / В. Н. Тутубалин. – М. : Изд. Московского университета, 1972. – 230 с.

91. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко – М. : Наука, 1988. – 448 с.

92. Адомиан Дж. Стохастические системы : пер. с англ. / Дж. Адомиан. – М. : Мир, 1987. – 378 с.

93. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1981.– 744 с.

94. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Партасарати ; [пер. с англ. А. В. Прохорова] ; [под ред. В. В. Сазонова] – М. : Мир, 1983. – 345 с.

95. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад ; [пер.с фр. В. Б. Тарасова] ; [под ред. С. А. Орловского]. – М. : Радио и связь, 1990. – 288 с.

96. Орлов А. И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные / А. И. Орлов. – М. : Знание, 1980. 64 с.

97. Орлов А. И. Устойчивость в социально–экономических моделях / А. И. Орлов. М. : Наука, 1979. – 288 с.

98. Орлов А. И. Прикладная статистика / А. И. Орлов. М. : Экзамен, 2004. – 320 с.

99. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде [пер. с англ. Н. И. Ринго] ; [под ред. Н. Н. Моисеева, С. А. Орловского] – М. : Мир, 1976. – 168 с.

100. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / [А. Н. Аверкин, И. З.Батыршин, А. Ф. Блишун и др.] ; под. ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

101. Mukaidano M. A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra) / M. Mukaidano // International symposium on multiple-valued logic, 11th. N.Y., 1981. – P. 27–34.

102. И. З. Батыршин. Основные операции нечеткой логики и их обобщения / И. З. Батыршин. – Казань : Отечество, 2001. – 100 с.

103. Mc Visar-Whelan P. J. Fuzzy and multivalued logic / Mc P. J. Visar-Whelan // 7th International Symposium on Multivalued Logic, N. C., 1977, P. 98–102.

104. Cai Wen. Introduction of extension set / Wen Cai // BUSEFAL, 1984, Ete, No. 19. P. 49–57.

105. Биркгоф Г. Теория решеток : пер. с англ. / Г. Биркгоф ; [под. ред. Л. А. Скорнякова]. – М. : Наука, 1984. – 568 с.

106. Goguen J. A. L-fuzzy sets / J. A. Goguen // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1967. – V. 18. – P. 145–174.

107. Goguen J. A. Concept representation in natural and artificial language: axioms, extensions and applications for fuzzu sets / J. A. Goguen // International Journal of Man–Machine Studies, 1974. – V. 6, P. 513–561.

108. Arbib M. A. Semiring languages / M. A. Arbib. – Stanford : Stanford University; Electrical Engineering Department. – 197 p.

109. Wechler W. Analyse and synthese zeitvariabler R-Fuzzy automaten / W. Wechler. – ZKJ Information, 1974. – V. 1. – P. 32–366.

110. Ralescu D. A. Fuzzy subobjects in a category and theory of C-sets / D. A. Ralescu // Fuzzy Sets and Systems, 1978. – V. 1. – P. 193–202.

111. Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра : пер. с англ. / Г. Биркгоф, Т. Барти – М. : Мир, 1976. – 400 с.

112. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок / Ю. А. Шрейдер. – М. : Наука, 1971. – 256 с.

113. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений / Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1989. –320 с.

114. Колмогоров А. Н. Введение в математическую логику / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин – М. : Издательство МГУ, 1982. – 120 с.

115. Колмогоров А. Н. Математическая логика. Дополнительные главы / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин – М. : Издательство МГУ, 1984. – 120 с.

116. Никольская И. Л. Математическая логика : учебник / И .Л. Никольская – М. : Высшая школа, 1981. – 127 с.

117. Синюков Н. С. Топология / Н. С. Синюков, Т. И. Матвеенко. – К. : Вища школа, 1984. – 264 с.

118. Зорич В.А. Математический анализ, часть I. – М. : Наука, 1981. – 544 с.

119. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – М. : Наука, 1984. – 752 с.

120. Математический анализ / [И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда]. – К.: Вища школа 1983. – Ч. 1. – 495 с.

121. Зорич В. А. Математический анализ, часть II / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.

122. Зорич В. А. Математический анализ, часть I / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.

123. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров : пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн ; под общ. ред. И. Г. Арамовича. – М. : Наука, 1977. – 832 с.

124. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев – М. : Наука, 1986. – 544 с.

125. Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logics / H. Rasiowa // Studies in Logics and the Foundations of Mathematics, vol. 78. – North-Holland, Amsterdam, 1974.

126. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств : пер. с франц. / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

127. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 448 с.

128. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / А. П. Ротштейн. – Винница : УНИВЕРСУМ-Винница, 1999. – 320 с.

129. Ротштейн О. П. Нечітка модель футбольного прогнозування з генетико-нейронною настройкою / О. П. Ротштейн, Г. Б. Ракитянська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 2. – С. 68– 78.

130. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. / С. Д. Штовба. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

131. Мелихов А. Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин – М. : Наука, 1990. – 272 с.

132. Zadeh L. A. A fuzzy-sets-theoretic interpretation of linguistic hedges / L. A. Zadeh // J. Gybern. – 1972. – Vol. 2. – P. 4–34.

133. Гуров С. И. Упорядоченные множества и универсальная алгебра (вводный курс) : Учебное пособие / С. И. Гуров. – М. : Издательский отдел ф-та ВМИК МГУ, 2004. – 104 с.

134. Математический энциклопедический словарь / [гл. ред. Ю. В. Прохоров ; ред. кол.: С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кудрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич]. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – 848 с.

135. Дороговцев А. Я. Математический анализ : Справочное пособие / А. Я. Дороговцев. – К. : Вища школа, 1985. – 528 с.

Наукове видання

Камінський Вячеслав Вікторович
Мокін Борис Іванович

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

Монографія

Редактор Н. Мазур
Оригінал-макет підготовлено В. В. Камінським

Підписано до друку 11.04.2012 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 7,39
Наклад 100 прим. Зам № 2012-047

Вінницький національний технічний університет,
КІВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-81-59
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.